EFFEKTIVE LAGRANGEDICHTE MIT KONSTANTEM HINTERGRUNDFELD UND TEMPERATURBAD IN DER QUANTENCHROMODYNAMIK

Dissertation

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

der Fakultät für Physik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von

VOLKER SCHANBACHER

aus Reutlingen

1981

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41523717_0014

Effektive Lagrangedichte mit konstantem Hintergrundfeld und Temperaturbad in der Quantenchromodynamik

D i s s e r t a t i o n

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

der Fakultät für Physik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von

Volker Schanbacher

aus Reutlingen

1981

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Prüfung:	16. Oktober 1981
Dekan:	Prof. Dr. Michael Grewing
1. Berichterstatter:	Prof. Dr. Walter Dittrich
2. Berichterstatter:	Prof. Dr. Johann Rafelski, Frankfu
3. Berichterstatter:	Prof. Dr. Harald Stumpf

Abstract

Schanbacher, Volker:

Effektive Lagrangedichte mit konstantem Hintergrundfeld und Temperaturbad in der Quantenchromodynamik

Die effektive Wirkung der Quantenchromodynamik wird in der Ein-Loop Näherung untersucht. Hierbei zeigt es sich, daß die effektive Wirkung bis zur Ordnung g^2 in äußeren colour-elektrischen Feldern einen negativen Imaginärteil aufweist. Es wird die Verträglichkeit dieses Ergebnisses mit der Forderung, daß der Betrag der Vakuum-Vakuum Amplitude nicht größer als eins werden darf, diskutiert. Weiterhin wird die exakte Ein-Loop effektive Lagrangedichte in kovariant-konstanten Feldern berechnet. Hierzu ist eine sorgfältige Analyse des Gluon-Propagators in kovariant-konstanten Feldern erforderlich. Es stellt sich dann heraus, daß die effektive Lagrangedichte in einem kovariant-konstanten colour-elektrischen Feld einen negativen Imaginärteil hat. Der Imaginärteil der effektiven Lagrangedichte in einem kovariant-konstanten colour-magnetischen Feld hingegen verschwindet. Diese Resultate weichen von denjenigen ab, die bisher in der Literatur veröffentlicht worden sind. Ferner wird in dieser Arbeit die Ein-Loop effektive Wirkung in einem Temperaturbad berechnet. Das Ergebnis weist darauf hin, daß eine dynamische Symmetriebrechung, die in der QCD bei der Temperatur $T = 0$ auftreten kann, durch eine Erhöhung der Temperatur nicht aufgehoben wird.

Inhaltsverzeichnis

		Seite
	Einleitung	3
1.	Die Quantenchromodynamik in äußeren Colour-Feldern , ein Überblick	12
2.	Die effektive Wirkung der Quantenchromodynamik	38
3.	Die Ein-Loop - Approximation	60
4.	Der Propagator eines masselosen geladenen Spin-1 Teilchens im homogenen elektromagnetischen Feld	71
5.	Das kovariant-konstante Feld	92
6.	Der Gluon-Propagator im kovariant-konstanten Feld	94
7.	Der Faddeev-Popov Propagator im kovariant-konstanten Feld	104
8.	Der Quark-Propagator im kovariant-konstanten Feld	105
9.	Die effektive Wirkung in kovariant-konstanten Felder Colour-Feldern	106
10.	Zusammenfassung der Ergebnisse für die effektive Lagrangedichte in kovariant-konstanten Colour-Feldern , Diskussion	125
11.	Die effektive Wirkung bei endlicher Temperatur	131
12.	Zusammenfassung , Diskussion	138
	Literaturverzeichnis	142
	Lebenslauf und Schriftenverzeichnis	144

Einleitung

In jeder relativistischen Quantenfeldtheorie ist die Kenntnis des wahren Vakuumzustandes von größter Bedeutung. Der wahre Vakuumzustand $|0\rangle$ ist derjenige (Heisenberg-) Zustand, in dem der Erwartungswert des Hamiltonoperators H ein Minimum annimmt, d.h. er erfüllt

$$\langle 0|H|0\rangle \leq \langle\psi|H|\psi\rangle \quad \text{für alle } |\psi\rangle \text{ mit } \langle\psi|\psi\rangle = 1 \tag{0.1a}$$

mit der Normierungsbedingung

$$\langle 0|0\rangle = 1 . \tag{0.1b}$$

(Wir folgen hierbei der üblichen Konvention, daß zwei "kets" $|\psi\rangle$ und $|\psi'\rangle$, die sich nur durch Multiplikation mit einer komplexen Zahl unterscheiden, denselben Zustand beschreiben.) Bestimmt man den Vakuumzustand gemäß (0.1a,b), so können zwei verschiedene Fälle auftreten. Entweder ist der Vakuumzustand durch (0.1a,b) eindeutig bestimmt, oder es gibt mehrere verschiedene Zustände die (0.1a,b) lösen; der Vakuumzustand ist dann entartet. Wir wollen dann

$$M_{|0\rangle} = \{|0_i\rangle\} \tag{0.2}$$

für die Menge aller Lösungen von (0.1a,b) schreiben. Jeder Zustand $|0_i\rangle \in M_{|0\rangle}$ stellt dann einen möglichen Vakuumzustand dar. Bis zum Jahre 1960 diskutierte man nur solche relativistischen Quantenfeldtheorien, in denen der Vakuumzustand nicht entartet ist. (Genauer gesagt, nahm man stets an, daß der Vakuumzustand

nicht entartet sei.) Seit den Arbeiten von Nambu [1] und Goldstone [2] wissen wir jedoch, daß durch spontane Symmetriebrechung auch in relativistischen Quantenfeldtheorien eine Entartung des Vakuumzustandes auftreten kann.

Für die nachfolgenden Betrachtungen wollen wir hier noch eine wichtige Eigenschaft des Vakuumzustandes erwähnen. In der axiomatischen Behandlung der relativistischen Quantenfeldtheorien nimmt man an, daß der Vakuumzustand unter den Transformationen der Poincaré-Gruppe, die stetig mit der Eins zusammenhängen, invariant ist. Also

$$e^{\frac{i}{\hbar} P^\mu a_\mu} |0\rangle = |0\rangle \tag{0.3}$$

$$e^{\frac{i}{2} \alpha_{\mu\nu} J^{\mu\nu}} |0\rangle = |0\rangle \tag{0.4}$$

für alle reelle a_μ und $\alpha_{\mu\nu}$. Hierbei sind P^μ und $J^{\mu\nu}$ die Generatoren der Raum-Zeit- Translationen bzw. der Transformationen der eingeschränkten Lorentzgruppe.

Wir wollen uns hier mit dem Vakuumzustand der Quantenchromodynamik beschäftigen. Bevor wir uns jedoch diesem komplizierten Fall zuwenden, wollen wir uns einige einfachere Modelle anschauen. Betrachten wir zunächst das Modell, das 1961 von Goldstone untersucht wurde. Sei ϕ ein komplexes skalares Feld mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^+ \partial^\mu \phi - V(\phi) \tag{0.5}$$

mit dem Potential

$$V = \frac{1}{2} \lambda^2 (\phi^+ \phi)^2 - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^+ \phi \; . \tag{0.6}$$

Hierbei sind λ^2 und μ^2 zwei reelle positive Konstanten.
Um den Vakuumzustand zu studieren, betrachten wir den Vakuum-Erwartungswert von ϕ.

$$\phi_{cl}(x) = \langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle \tag{0.7}$$

Setzen wir die Gültigkeit von (0.3) voraus, so folgt, daß

$$\phi_{cl}(x) = \phi_{cl} = \text{const.} \tag{0.8}$$

gelten muß. Da gemäß (0.1a,b) der Vakuumzustand als der Zustand niedrigster Energie definiert ist, erhalten wir wegen (0.6) in der "tree"- Approximation

$$|\phi_{cl}(x)|^2 = |\phi_{cl}|^2 = \frac{\mu^2}{2\lambda^2} \tag{0.9}$$

oder

$$\phi_{cl}(x) = \sqrt{\frac{\mu^2}{2\lambda^2}}\, e^{i\varphi} \tag{0.10}$$

mit einer <u>konstanten</u> Phase φ. Die Phase φ kann beliebig gewählt werden. Der Vakuumzustand ist deshalb entartet.
1964 wurde von Higgs die spontane Symmetriebrechung in einer abelschen Eichtheorie untersucht [3]. 1967 wurde dies von Kibble auf den Fall der nichtabelschen Eichtheorien ausgedehnt [4].
Ausgangpunkt ist hierbei die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left((\partial_\mu + g t^i A^i_\mu)\phi\right)^2 - V(\phi) - \frac{1}{4} F^i_{\mu\nu} F^{i\mu\nu} \tag{0.11}$$

mit

$$F^i_{\mu\nu} = \partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu + g c^{ijk} A^j_\mu A^k_\nu \tag{0.12}$$

und

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\lambda^2\phi^4 - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 \qquad (0.13)$$

Hierbei ist A^i_μ das Eichfeld, und ϕ ist ein reelles skalares Feld. Die t^i sind die Generatoren der Eichtransformationen im ϕ-Raum.

Setzt man auch hier wieder (0.3) als gültig voraus, so erhält man auch hier für den Vakuum-Erwartungswert

$$\phi_{cl}(x) = \langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle = const. \qquad (0.14)$$

In "tree"-Approximation findet man mit Hilfe von (0.13)

$$\phi^2 = \frac{\mu^2}{2\lambda^2} \qquad (0.15)$$

Der Vakuumzustand ist deshalb auch hier entartet.

In den Modellen (0.5) und (0.11) wurde die Symmetriebrechung durch die spezielle Wahl der Potentiale (0.6) bzw. (0.13) erzwungen. Im Gegensatz dazu versuchten Coleman & E. Weinberg [5] eine Symmetriebrechung durch Strahlungskorrekturen zu erreichen. Man erhält dann eine Entartung des Vakuumzustandes durch die sogenannte dynamische Symmetriebrechung. Ein bekanntes Modell hierfür ist das Gross-Neveu Modell [6]. Es ist durch die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi - \frac{1}{2}\sigma^2 - g\bar{\psi}\psi\sigma \qquad (0.16)$$

gegeben. Hierbei ist ψ ein N-komponentiger Spinor. Das Feld σ ist dabei keine dynamische Variable sondern erfüllt die Bindungsgleichung $\sigma = -g\bar{\psi}\psi$. Setzt man wieder (0.3) als gültig voraus, so folg

$$\sigma_{cl}(x) \equiv \langle 0 | \sigma(x) | 0 \rangle = const. \qquad (0.17)$$

Berechnet man (0.17) in der Ein-Loop - Approximation, so findet man

$$\sigma_{cl}(x) = \sigma_{cl} \neq 0 \qquad (0.18)$$

Es tritt deshalb auch hier eine Entartung des Vakuumzustandes auf auf.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, Kenntnis über den Vakuumzustand der QCD zu erreichen. Lassen wir zunächst die Quarks außer acht, so ist die Lagrangedichte durch

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} G^i_{\mu\nu} G^{i\mu\nu} \qquad (0.19)$$

mit

$$G^i_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g c^{ijk} A^i_\mu A^k_\nu \qquad (0.20)$$

gegeben. Hierbei sind die c^{ijk} die Strukturkonstanten der Eichgruppe.

Setzen wir die Gültigkeit von (0.3) und (0.4) voraus, so folgt zunächst mit (0.3)

$$\langle 0 | A^i_\mu(x) | 0 \rangle = const$$

$$\langle 0 | G^i_{\mu\nu}(x) | 0 \rangle = const.$$

Benützen wir dann noch (0.4), so erhalten wir

$$\langle 0 | A^i_\mu(x) | 0 \rangle = 0 , \tag{0.21}$$

$$\langle 0 | G^i_{\mu\nu}(x) | 0 \rangle = 0 . \tag{0.22}$$

Unter der Annahme, daß das QCD Vakuum unter den Transformationen der Poincaré-Gruppe, die stetig mit der Eins zusammenhängen, invariant ist, haben wir also gefunden, daß der Vakuum-Erwartungswert des Feldstärketensors $G^i_{\mu\nu}$ gleich null ist.
Da der Vakuumzustand der Zustand niedrigster Energie ist, sollte deshalb das effektive Potential $V^{eff}[G^i_{\mu\nu}]$ bei $G^i_{\mu\nu} = 0$ ein absolutes Minimum haben. Andererseits sagen uns jedoch die Ergebnisse von Batalin, Matinyan und Savvidy [7], daß das effektive Potential für reine colour-magnetische und reine colour-elektrische kovariant-konstante Felder niedrigere Werte annehmen kann, als für den Fall $G^i_{\mu\nu} = 0$. (Vgl. (10.11), (10.12) und Fig. 8.)
Die Ergebnisse von Batalin et al. sind somit im offenen Widerspruch zu der Annahme, daß das QCD Vakuum unter den Transformationen der Poincaré-Gruppe invariant ist.
Wir müssen deshalb überprüfen, ob (0.3) und (0.4) in der QCD überhaupt zutrifft. Die Richtigkeit von (0.3) läßt sich leicht herleiten, wenn wir annehmen, daß der Hamiltonoperator der QCD selbstadjungiert ist.
Zum Beweis von (0.3) nehmen wir also an, daß der Hamiltonoperator in jedem Inertialsystem selbstadjungiert ist. Dann ist der Hamiltonoperator in jedem Inertialsystem diagonalisierbar. Daraus folgt unmittelbar, daß jeder Zustand $|0\rangle$ der (0.1a,b)

erfüllt, ein Eigenzustand zum Hamiltonoperator sein muß.
Für jeden Vakuumzustand gilt also

$$H\,|0\rangle = E_0\,|0\rangle \qquad (0.22a)$$

bezogen auf ein festes Inertialsystem I. Gehen wir nun zu einem anderen Inertialsystem I' über, so muß $|0\rangle$ auch dort ein Vakuumzustand sein, d.h. es muß

$$H'\,|0\rangle = E_0\,|0\rangle \qquad (0.22b)$$

gelten. Hierbei ist

$$H' = H + \vec{P}\cdot\vec{v}/c + \cdots \quad , \qquad (0.23)$$

wenn wir uns auf infinitesimale Lorentztransformationen beschränken. Setzen wir (0.23) in (0.22) ein, so folgt

$$\vec{P}\cdot\vec{v}/c\,|0\rangle = 0\,|0\rangle \quad \text{für alle } \vec{v} \ .$$

Also

$$\vec{P}\,|0\rangle = 0\,|0\rangle \ .$$

Unter Berücksichtigung der quadratischen Terme in $\vec{v}$ in (0.23) folgt dann auch noch

$$H\,|0\rangle = 0\,|0\rangle \ .$$

Somit haben wir insgesamt

$$P^{\mu}\,|0\rangle = 0\,|0\rangle \qquad (0.24)$$

gefunden.
Falls der Hamiltonoperator der QCL selbstadjungiert ist, so folgt (0.24) und damit (0.3). Dies impliziert dann

$$\langle 0|\,G^{i}_{\mu\nu}\,|0\rangle = const. \qquad (0.25)$$

Da das QCD Vakuum über größere Raum-Zeit - Bereiche gemittelt rotationsinvariant sein muß, muß

$$\overline{\langle 0 | G^{i}_{\mu\nu}(x) | 0 \rangle}^{x} = 0 \qquad (0.26)$$

gelten. Kombinieren wir dies mit (0.25), so folgt

$$\langle 0 | G^{i}_{\mu\nu}(x) | 0 \rangle = 0 \qquad (0.22)$$

Zur Herleitung von (0.3) und (0.22) genügt es also anzunehmen, daß der Hamiltonoperator der QCD selbstadjungiert ist. Andererseits stellt sich heraus, daß der Hamiltonoperator in kovariant-konstanten Feldern nicht selbstadjungiert ist. Deshalb darf es uns auch nicht wundern, daß die Ergebnisse von Batalin et al. im Widerspruch zu (0.22) stehen. Es stellt sich nun natürlich die Frage, wie das richtige QCD Vakuum aussieht? Ist es gegen die Poincaré-Transformationen invariant und gilt somit (0.22), oder ist der Hamiltonoperator nicht selbstadjungiert und deshalb $\langle 0 | G^{i}_{\mu\nu}(x) | 0 \rangle \neq 0$ möglich? Wir folgen bei der Diskussion dieser Frage dem Standpunkt der Kopenhagener Gruppe [8], [33], daß die Vakuumenergie für ein nichtverschwindendes homogenes colour-magnetisches Feld kleiner werden kann, womit die Untersuchung der QCD in kovariant-konstanten Colour-Feldern durchaus zur Bestimmung des wahren QCD Vakuums beitragen kann.

In dieser Arbeit wird die effektive Wirkung und das effektive Potential für kovariant-konstante Felder auf eine etwas andere Weise als in [7], [8] oder [9] berechnet. Die Resultate weisen dann auch einen anderen Imaginärteil für die effektive Wirkung auf.

Nachdem wir die effektive Wirkung für Temperatur T=0 berechnet haben, werden wir sie dann auch noch im Temperaturbad für ein kovariant-konstantes colour-magnetisches Feld berechnen. Wir benützen dabei die in [10] und [11] aufgezeigten Methoden. Interessanterweise stellt sich heraus, daß es keinerlei Anzeichen gibt, daß eine dynamische Symmetriebrechung, die bei Temperatur T=0 auftreten kann, bei höheren Temperaturen wieder aufgehoben wird.

Um dem Leser das Studium dieser Arbeit zu erleichtern, soll hier kurz auf den Inhalt der einzelnen Kapitel eingegangen werden. In den Kapiteln 1 und 2 werden nur Grundbegriffe der QCD wiederholt. Der fortgeschrittene Leser sollte deshalb diese beiden Kapitel auslassen. In Kapitel 3 wird die Ein-Loop Approximation behandelt. Der erste Abschnitt ist hierbei von formaler Natur und führt auf das in (3.16) angegebene Ergebnis. Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels werden interessante physikalische Folgerungen diskutiert. Die Kapitel 4 bis 8 sind den Greenschen Funktionen in konstanten Feldern gewidmet. Die Ein-Loop effektive Wirkung wird in Kapitel 9 berechnet. Die wichtigsten Ergebnisse dieses Kapitels findet man in Kapitel 10. Die effektive Wirkung bei endlicher Temperatur wird in Kapitel 11 ermittelt.

1. Die Quantenchromodynamik in äußeren Colour-Feldern , ein Überblick

Die Lagrangedichte des Quark-Gluonen Systems

Die Quantenchromodynamik ist eine nichtabelsche Eichtheorie. Sie beschreibt die Wechselwirkung von Spin-$\frac{1}{2}$ - Quarkfeldern mit Spin-1 -Gluonenfeldern. Die Lagrangedichte ist gegeben durch [12]

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}^R_{YM}(x) + \mathcal{L}^R_Q(x) + \mathcal{L}^R_I(x) + c.t. \quad . \tag{1.1}$$

Hierbei ist

$$\mathcal{L}^R_{YM}(x) = -\frac{1}{4} G^i_{\mu\nu} G^{i\mu\nu} \tag{1.2}$$

die Lagrangedichte der Gluonen mit dem Feldstärketensor

$$G^i_{\mu\nu} = \partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu + g c^{ijk} A^j_\mu A^k_\nu \tag{1.3}$$

und

$$\mathcal{L}^R_Q(x) = \bar{\psi}(x)[\hbar c \gamma_\mu i\partial^\mu - mc^2]\psi(x) \tag{1.4}$$

die Lagrangedichte der Quarks .

$$\mathcal{L}^R_I(x) = j^k_\mu(x) A^{k\mu}(x) \tag{1.5}$$

mit dem Quark-Colour-Strom

$$j^k_\mu(x) = \hbar c g \bar{\psi}(x) \gamma_\mu t^k \psi(x) \tag{1.6}$$

beschreibt die Wechselwirkung zwischen Quarks und Gluonen. Die t^k sind Darstellungen der Generatoren der Eichgruppe im Quark Colour-Raum und erfüllen die Vertauschungsrelationen

$$[t^i, t^j] = i c^{ijk} t^k \quad . \tag{1.7}$$

Die c^{ijk} sind geeignete total antisymmetrische Strukturkonstanten der Colour-Eichgruppe. (In der QCD haben wir die SU(3) als Eichgruppe. Wir wollen hier aber auch andere halbeinfache kompakte Eichgruppen mitbetrachten.) Diese Strukturkonstanten erfüllen die Jacobische Identität

$$c^{ijl}c^{lkm} + c^{jkl}c^{lim} + c^{kil}c^{ljm} = 0 \quad . \tag{1.8}$$

Unter Benützung der Antisymmetrie der Strukturkonstanten in den beiden ersten Indizes können wir daraus für die Matrizen T_c^j mit

$$(T_c^j)^{ik} = i c^{ijk} \tag{1.9}$$

die Vertauschungsrelationen

$$[T_c^i, T_c^j] = i c^{ijk} T_c^k \tag{1.10}$$

ableiten. Diese Matrizen sind die reguläre Darstellung der Gruppengeneratoren unserer Eichgruppe.
Die $A_\mu^i(x)$ sind die Eichfelder, die der Bose-Statistik genügen, und die $\psi(x)$ sind die Quarkfelder; sie genügen der Fermi-Statistik. In (1.4) haben wir sowohl bei den $\psi(x)$ als auch bei der Massenmatrix m

$$m = \begin{pmatrix} m_u & & \sigma \\ & m_d & \\ \sigma & & m_s \ddots \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

die Flavour-Indizes weggelassen.

g ist die Kopplungskonstante ; hier ist $g^2\hbar c$ eine dimensionslose Größe.

Schließlich steht c.t. für die Counter-Terme, die unerwünschte Selbstwechselwirkungen kompensieren.

Unter den infinitesimalen Eichtransformationen

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{-ig t^k \theta^k(x)} \psi(x) \quad , \tag{1.12a}$$

$$\bar{\psi}(x) \longrightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)\, e^{ig t^k \theta^k(x)} \quad , \tag{1.12b}$$

$$A^{k\mu}(x) \longrightarrow A^{k\mu\prime}(x) = A^{k\mu}(x) - \partial^\mu \theta^k(x) + g\, c^{klm}\, \theta^l(x)\, A^{m\mu}(x) \tag{1.12c}$$

verhält sich das System gemäß

$$\mathcal{L}^R_{YM}(x) \longrightarrow \mathcal{L}^{R'}_{YM}(x) = \mathcal{L}^R_{YM}(x) \quad , \tag{1.13a}$$

$$\mathcal{L}^R_Q(x) \longrightarrow \mathcal{L}^{R'}_Q(x) = \mathcal{L}^R_Q(x) + j_\mu{}^k(x)\, \partial^\mu \theta^k(x) \quad , \tag{1.13b}$$

$$\mathcal{L}^R_I(x) \longrightarrow \mathcal{L}^{R'}_I(x) = \mathcal{L}^R_I(x) - j_\mu{}^k(x)\, \partial^\mu \theta^k(x) \quad , \tag{1.13c}$$

$$j_\mu{}^k(x) \longrightarrow j_\mu{}^{k'}(x) = \left[\exp\{-ig\, T^l_c\, \theta^l(x)\}\right]^{km} j_\mu{}^m(x) \quad , \tag{1.13d}$$

$$G^k_{\mu\nu}(x) \longrightarrow G^{k'}_{\mu\nu}(x) = \left[\exp\{-ig\, T^l_c\, \theta^l(x)\}\right]^{km} G^m_{\mu\nu}(x) \quad . \tag{1.13e}$$

Die "renormierte" Lagrangedichte [x])

$$\mathcal{L}^R(x) = \mathcal{L}^R_{YM}(x) + \mathcal{L}^R_Q(x) + \mathcal{L}^R_I(x) \tag{1.14}$$

ist also unter den obigen Eichtransformationen invariant.

---

x) Siehe Fußnote auf Seite 15

Hier genügt es jedoch nicht, daß die "renormierte" Lagrangedichte (1.14) eichinvariant ist, sondern es muß auch die gesamte (oder "nackte") Lagrangedichte (1.1) eichinvariant sein. Dies erreichen wir durch den Ansatz [x])

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) &= \mathcal{L}^{R}_{YM}(x) + \mathcal{L}^{R}_{Q}(x) + \mathcal{L}^{R}_{I}(x) + c.t. \\ &= \mathcal{L}_{YM}(x) + \mathcal{L}_{Q}(x) + \mathcal{L}_{I}(x) \quad . \end{aligned} \tag{1.15}$$

Hierbei ist

$$\mathcal{L}_{YM}(x) = -\frac{1}{4} Z_3 \tilde{G}^{i}_{\mu\nu} \tilde{G}^{i\mu\nu} \tag{1.16}$$

mit

$$\tilde{G}^{i}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^{i}_{\nu} - \partial_\nu A^{i}_{\mu} + g_B c^{ijk} A^{j}_{\mu} A^{k}_{\nu} \quad , \tag{1.17}$$

und

$$\mathcal{L}_{Q}(x) = Z_2 \bar{\psi}(x) [\hbar c \gamma_\mu i \partial^\mu - m_B c^2] \psi(x) \quad , \tag{1.18}$$

und

$$\mathcal{L}_{I}(x) = Z_2 \bar{\psi}(x) \hbar c g_B \gamma_\mu t^k A^{\mu k} \psi(x) \quad . \tag{1.19}$$

Dabei sind Z_2, Z_3, g_B reelle Konstanten und m_B eine Massenmatrix. Sie müssen so gewählt werden, daß die damit berechneten Resultate endlich werden und darüber hinaus noch bestimmten physikalischen Randbedingungen genügen. So muß etwa der Propagator des up-Quarks für $p^2 \longrightarrow (m_u c)^2$ einen Pol aufweisen, usw. .

[x]) Wir benützen die vielleicht etwas unübliche Notation von Taylor [13], § 14 .

Setzen wir (1.16) bis (1.19) in 1.15) ein , so sehen wir , daß die gesamte Lagrangedichte (1.15) gegen die Eichtransformationen ($\theta^k(x)$ infinitesimal),

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{-i g_B t^k \theta^k(x)} \psi(x) , \tag{1.20a}$$

$$\bar{\psi}(x) \longrightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) e^{i g_B t^k \theta^k(x)} , \tag{1.20b}$$

$$A^{k\mu}(x) \longrightarrow A^{k\mu'}(x) = A^{k\mu}(x) - \partial^\mu \theta^k(x) + g_B c^{klm} \theta^l(x) A^{m\mu}(x) \tag{1.20c}$$

invariant ist . Für die nichtabelschen Eichtheorien wird im allgemeinen $g \neq g_B$ gelten[x]). Die "renormierte" Lagrangedichte (1.14) und die gesamte Lagrangedichte (1.15) sind deshalb nicht unter denselben Eichtransformationen invariant.

Für die praktische Rechnung ist es bequem, die sogenannten nackten Felder A_B und ψ_B und die nackte Kopplungskonstante g_0 durch die Transformationsgleichungen [xx])

$$A^{k\mu} = Z_3^{-\frac{1}{2}} A_B^{k\mu} , \tag{1.21a}$$

$$\psi = Z_2^{-\frac{1}{2}} \psi_B , \quad \bar{\psi} = Z_2^{-\frac{1}{2}} \bar{\psi}_B , \tag{1.21b}$$

$$g_B = Z_3^{\frac{1}{2}} g_0 \tag{1.21c}$$

einzuführen.

---

[x]) In der Quantenelektrodynamik gilt wegen der Ward-Identität $Z_1 = Z_2$, daß $e = e_B$ ist.

[xx]) Siehe Fußnote auf Seite 15 .

Setzen wir (1.21) in (1.16),(1.18),(1.19) ein,so finden wir

$$\mathcal{L}_{ym}(x) = -\frac{1}{4}\, G^{i}_{\beta\mu\nu}\, G^{i\mu\nu}_{\beta} \tag{1.22}$$

mit

$$G^{i\mu\nu}_{\beta} = \partial^{\mu} A^{i\nu}_{\beta} - \partial^{\nu} A^{i\mu}_{\beta} + g_0\, c^{ijk}\, A^{j\mu}_{\beta}\, A^{k\nu}_{\beta}\,, \tag{1.23}$$

und

$$\mathcal{L}_{Q}(x) = \bar{\psi}_{\beta}\left[\hbar c\, \gamma_{\mu} i\partial^{\mu} - m_{\beta} c^{2}\right] \psi_{\beta}\,, \tag{1.24}$$

und

$$\mathcal{L}_{I}(x) = \bar{\psi}_{\beta}\, \hbar c\, g_0\, \gamma_{\mu}\, t^{k} A^{k\mu}_{\beta}\, \psi_{\beta}\,. \tag{1.25}$$

Substituieren wir (1.22) bis (1.25) in (1.15), so sehen wir, daß die gesamte Lagrangedichte (1.15) gegen die Eichtransformationen ($\theta(x)$ infinitesimal)

$$\psi_{\beta}(x) \longrightarrow \psi'_{\beta}(x) = e^{-i g_0 t^{k}\theta^{k}(x)}\, \psi_{\beta}(x)\,, \tag{1.26a}$$

$$\bar{\psi}_{\beta}(x) \longrightarrow \bar{\psi}'_{\beta}(x) = \bar{\psi}_{\beta}(x)\, e^{i g_0 t^{k}\theta^{k}(x)}\,, \tag{1.26b}$$

$$A^{k\mu}_{\beta}(x) \longrightarrow A^{k\mu\prime}_{\beta}(x) = A^{k\mu}_{\beta}(x) - \partial^{\mu}\theta^{k}(x) + g_0\, c^{klm}\,\theta^{l}(x) A^{m\mu}_{\beta}(x) \tag{1.26c}$$

invariant ist.

Kopplung an c-Zahlen-Quellen

Wir wollen hier die QCD in äußeren Colour-Feldern, die von einem Colour-Strom J^{ext} erzeugt werden sollen, betrachten. Die Kopplung an diesen äußeren Strom wird durch die Addition des Quellenterms $A J^{ext}$ zur Lagrangedichte (1.1) erreicht. Um das System zu quantisieren, koppeln wir es an drei weitere c-Zahlen-Quellen $J, \eta, \bar{\eta}$. Die funktionale Differentation des zugehörigen erzeugenden Funktionals nach diesen drei Quellen wird dann die n-Punkt-Funktionen des Systems ergeben.
Die Lagrangedichte ergibt sich nun zu

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_{YM}(x) + \mathcal{L}_{Q}(x) + \mathcal{L}_{I}(x) + (J_{\mu}^{k\,ext}(x) + J_{\mu}^{k}(x)) A^{k\mu}(x) + \bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x) \quad . \tag{1.27}$$

Hierbei sind $\mathcal{L}_{YM}(x)$, $\mathcal{L}_{Q}(x)$, $\mathcal{L}_{I}(x)$ die in (1.16) bis (1.19) definierten Lagrangedichten. Setzen wir wieder (1.21) ein, so finden wir für (1.27)

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_{YM}(x) + \mathcal{L}_{Q}(x) + \mathcal{L}_{I}(x) + Z_3^{-\frac{1}{2}} (J_{\mu}^{k\,ext}(x) + J_{\mu}^{k}(x)) A_{B}^{k\mu} + Z_2^{-\frac{1}{2}} \left(\bar{\eta}(x)\psi_{B}(x) + \bar{\psi}_{B}(x)\eta(x) \right) \quad . \tag{1.28}$$

Für $\mathcal{L}_{YM}(x)$, $\mathcal{L}_{Q}(x)$, $\mathcal{L}_{I}(x)$ verwenden wir diesmal die Gleichungen (1.22) bis (1.25).

Quantisierung

In diesem Abschnitt wollen wir die Quantisierung der QCD in äußeren Colour-Feldern mit Hilfe eines Wegintegrals kurz beschreiben.[x]) Dabei werden wir hier vor allem die sogenannte Hintergrundeichung betrachten.
Um das erzeugende Funktional für unser System einzuführen, ist es nützlich, zunächst etwas zur Notation der quantenmechanischen Zustände zu sagen. Für einen quantenmechanischen Zustand verwenden wir das Symbol

$$|\vec{a}\,,\, t_0\rangle \qquad (1.29)$$

Dies meint einen Heisenbergzustand der durch einen vollständigen Satz von Heisenbergoperatoren $\mathcal{A}_i(t)$ für eine feste Zeit $t = t_0$ gekennzeichnet ist

$$\mathcal{A}_i(t_0)\,|\vec{a}\,,t_0\rangle = a_i\,|\vec{a}\,,t_0\rangle \quad \text{für } i=1,\dots,n \qquad (1.30)$$

Insbesondere, wenn wir die Energie- und Impulsoperatoren H, $\vec{P}$ zur Charakterisierung der Zustände heranziehen, erhalten wir die Energie- und Impulseigenzustände

$$H(t_0)\,|(E,\vec{p},\dots),t_0\rangle = E\,|(E,\vec{p},\dots),t_0\rangle\,, \qquad (1.30a)$$

$$\vec{P}(t_0)\,|(E,\vec{p},\dots),t_0\rangle = \vec{p}\,|(E,\vec{p},\dots),t_0\rangle \qquad (1.30b)$$

---

[x]) Siehe etwa [12],[13],[14] .

zur festen Zeit $t = t_0$. Der Vakuumzustand des Systems — bezogen auf die Zeit $t = t_0$ — ist dann durch

$$|0, t_0\rangle = |(E_{min}, \dots), t_0\rangle \tag{1.31}$$

gegeben . Falls dieser entartet sein sollte , müssen wir ihn durch die Angabe von weiteren Quantenzahlen genauer kennzeichnen. Auf diesen Punkt wollen wir hier jetzt nicht eingehen , sondern einfach $|0, t_0\rangle$ für den Vakuumzustand schreiben , egal wie er beschaffen ist.

Hier wollen wir nun annehmen, daß für $t \longrightarrow \pm\infty$ alle äußeren Quellen $J^{ext}, J, \eta, \bar{\eta}$ genügend schnell gegen null gehen . Wenn wir geeignete Operatoren $\alpha_i(t)$ gewählt haben , werden wir die Phasenfaktoren der Zustände $|\vec{a}, t_0\rangle$ so wählen können, daß die Grenzwerte

$$\begin{aligned} |\vec{a}, +\infty\rangle &:= \lim_{t_0 \to +\infty} |\vec{a}, t_0\rangle \quad , \\ |\vec{a}, -\infty\rangle &:= \lim_{t_0 \to -\infty} |\vec{a}, t_0\rangle \end{aligned} \tag{1.32}$$

existieren . Als Abkürzung verwenden wir hierfür die Symbole

$$\begin{aligned} |\vec{a}_+\rangle &:= |\vec{a}, +\infty\rangle \quad , \\ |\vec{a}_-\rangle &:= |\vec{a}, -\infty\rangle \quad . \end{aligned} \tag{1.33}$$

Speziell

$$\begin{aligned} |0_+\rangle = |0, +\infty\rangle &= \lim_{t_0 \to +\infty} |0, t_0\rangle \quad , \\ |0_-\rangle = |0, -\infty\rangle &= \lim_{t_0 \to -\infty} |0, t_0\rangle \end{aligned} \tag{1.34}$$

für den Vakuumzustand.

Das Transformationsmatrixelement $\langle \vec{b}_+ | \vec{a}_- \rangle^{J^{ext},J,\eta,\bar{\eta}}$ ist eine fundamentale Größe in jeder Quantenfeldtheorie. Es ist die Übergangsamplitude dafür, daß das System unter dem Einfluß der Quellen $J^{ext},J,\eta,\bar{\eta}$ vom Zustand $|\vec{a}_-\rangle$ in den Zustand $|\vec{b}_+\rangle$ übergeht. Wir schreiben hierfür auch

$$W_{ba}[J^{ext},J,\eta,\bar{\eta}] := \langle \vec{b}_+ | \vec{a}_- \rangle^{J^{ext},J,\eta,\bar{\eta}} . \qquad (1.35)$$

Insbesondere

$$W[J^{ext},J,\eta,\bar{\eta}] := \langle 0_+ | 0_- \rangle^{J^{ext},J,\eta,\bar{\eta}} =: e^{\frac{i}{\hbar c} Z[J^{ext},J,\eta,\bar{\eta}]} . \qquad (1.36)$$

$W[J^{ext},J,\eta,\bar{\eta}]$, die Vakuum-Vakuum-Amplitude, ist das erzeugende Funktional aller Greenscher Funktionen, d.h. n-fache Differentiation von W nach den Quellen $J,\eta,\bar{\eta}$ ergibt die n-Punkt-Funktionen des Systems. $Z[J^{ext},J,\eta,\bar{\eta}]$ ist das erzeugende Funktional aller zusammenhängender Greenscher Funktionen.

Hier wollen wir nun die Vakuum-Vakuum-Amplitude (1.36) mit Hilfe eines Wegintegrals berechnen. Dazu ist es notwendig, zunächst etwas zu den Eichtransformationen (1.20a-c) zu sagen, die die Lagrangedichte (1.1) ≡ (1.15) invariant lassen. Nehmen wir ein festes Tripel $(A^{k\mu},\psi,\bar{\psi})$ aus unserem Funktionenraum und wenden darauf die Gesamtheit aller Eichtransformationen an, so erzeugen wir damit eine Hyperfläche σ in unserem Funktionenraum, auf der die Lagrangedichte (1.15) einen konstanten Wert annimmt. Diese Hyperfläche heißt

Orbit von $(A^{k\mu}, \psi, \bar{\psi})$ und wird durch einen Eichgruppenparameter g_σ parameterisiert . Somit kann jedem Tripel $(A^{k\mu}, \psi, \bar{\psi})$ eindeutig ein Tupel (σ, g_σ) zugeordnet werden.

$$(A^{k\mu}, \psi, \bar{\psi}) \longleftrightarrow (\sigma, g_\sigma), \tag{1.37}$$

oder

$$\begin{aligned} A^{k\mu} &= A^{k\mu}(\sigma, g), \\ \psi &= \psi(\sigma, g), \\ \bar{\psi} &= \bar{\psi}(\sigma, g). \end{aligned} \tag{1.38}$$

Die Vakuum-Vakuum-Amplitude (1.36) kann nun mit Hilfe von einem Wegintegral berechnet werden .

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^{J^{ext}, \eta, \bar{\eta}} = \frac{1}{\tilde{N} \cdot N_p} \int dA^{k\mu} d\bar{\psi} d\psi \, p(\sigma, g_\sigma) \exp\left\{\frac{i}{\hbar c} \int d^4x \, \mathcal{L}(x)\right\}\Big|_{x^0 \to -ix_4}. \tag{1.39}$$

Hierbei ist $\mathcal{L}(x)$ die in (1.27) definierte Lagrangedichte. $p(\sigma, g_\sigma)$ ist eine Verteilungsfunktion , die das Gewicht dafür angibt , daß eine bestimmte Eichung zum Wegintegral beiträgt. Diese Verteilungsfunktion muß die Normierungsbedingung

$$\int_\sigma dg_\sigma \, p(\sigma, g_\sigma) = N_p \tag{1.40}$$

mit einer von σ unabhängigen Konstanten N_p erfüllen.Hierbei ist dg_σ das eichunabhängige Maß unserer Eichgruppe , das bis auf eine multiplikative Konstante durch die Eigenschaft

$$\int_{\sigma} d\tilde{q}_\sigma \, f(\sigma, \tilde{q}_\sigma \circ q_\sigma) = \int_{\sigma} d\tilde{q}_\sigma \, f(\sigma, \tilde{q}_\sigma) \qquad (1.41)$$

für alle $f(\sigma, q_\sigma)$, alle σ und alle q_σ

bestimmt ist.

Setzt man in (1.39) die Quellen $J^{ext}, J, \eta, \bar{\eta}$ gleich null , so wird , wegen der Eichinvarianz der quellenfreien Lagrangedichte , die Vakuum-Vakuum-Amplitude (1.39) von der speziellen Wahl von $p(\sigma, q_\sigma)$ unabhängig.

Die Konstante $\tilde{N}$ in (1.39) wird so gewählt , daß die Vakuum-Vakuum-Amplitude gleich eins ist,wenn alle äußeren Quellen $J^{ext}, J, \eta, \bar{\eta}$ abgeschaltet sind und das System in dem stabilen Grundzustand ist .

Schließlich muß noch darauf hingewiesen werden , daß wir (1.39) im Euklidischen auswerten müssen , was durch den Zusatz $x^0 \longrightarrow -ix_4$ in (1.39) symbolisiert wird. [x])

---

[x]) Eine plausible Erklärung hierfür findet man z.B. in [14] Dort wird für ein quantenmechanisches System mit einem Freiheitsgrad gezeigt , daß die Vakuum-Vakuum-Amplitude durch

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle = \lim_{\substack{T' \to -i\infty \\ T \to +i\infty}} \frac{1}{N} \int dq \, \exp\left\{ \frac{i}{\hbar c} \int_T^{T'} dt \, L(q(t), \dot{q}(t)) \right\}$$

gegeben ist.

Als Verteilungsfunktion $p(\mathcal{O}, q_{\mathcal{O}})$ wählen wir hier

$$p(\mathcal{O}, q_{\mathcal{O}}) = \int df^i \exp\left\{-\frac{i}{\hbar c}\frac{1}{2\xi}\int d^4x\left[f^i(x) - \tilde{\kappa}(\delta^{ij}\partial^\mu + \kappa g c^{ikj}\bar{A}^{k\mu}_{(\omega)})\bar{A}^j_\mu(x)\right]^2\right\}$$
$$\cdot\bar{\Delta}\left[A^k_\mu(\mathcal{O}, q_{\mathcal{O}}), f^i\right]\delta\left((\delta^{ij}\partial^\mu + \kappa g c^{ikj}\bar{A}^{k\mu})A^j_\mu(\mathcal{O}, q_{\mathcal{O}}) - f^i\right). \tag{1.42}$$

Hierbei ist $A^k_\mu = A^k_\mu(\mathcal{O}, q_{\mathcal{O}})$ gemäß (1.38) ein Funktional von $\mathcal{O}$ und $q_{\mathcal{O}}$. $\bar{A}^k_\mu$ ist zunächst noch ein beliebig frei wählbares Hilfsfeld. In Kapitel 2 werden wir hierfür ein sogenanntes Hintergrundfeld einsetzen, ein Funktional von J^{ext} oder J^{ext} und J. κ und $\tilde{\kappa}$ sind reelle Parameter und $\bar{\Delta}[A^k_\mu(\mathcal{O}, q_{\mathcal{O}}), f^i]$ eine Funktionaldeterminante, die so gewählt werden muß, daß Gleichung (1.40) erfüllt ist.

Wählen wir

$$\bar{\Delta}\left[A^k_\mu(\mathcal{O}, q_{\mathcal{O}}), f^i\right] = \left\{\int d\tilde{q}_{\mathcal{O}}\,\delta\left((\delta^{ij}\partial^\mu + \kappa g c^{ikj}\bar{A}^{k\mu})A^j_\mu(\mathcal{O}, \tilde{q}_{\mathcal{O}} \circ q_{\mathcal{O}}) - f^i\right)\right\}^{-1}, \tag{1.43}$$

so finden wir mit Hilfe von (1.41), daß (1.43) von $q_{\mathcal{O}}$ überhaupt gar nicht abhängig ist. Deshalb resultiert

$$\int d\tilde{q}_{\mathcal{O}}\,\bar{\Delta}[A^k_\mu(\mathcal{O}, \tilde{q}_{\mathcal{O}}), f^i]\,\delta\left((\delta^{ij}\partial^\mu + \kappa g c^{ikj}\bar{A}^{k\mu})A^j_\mu(\mathcal{O}, \tilde{q}_{\mathcal{O}}) - f^i\right)$$
$$= \bar{\Delta}[A^k_\mu(\mathcal{O}, q_{\mathcal{O}}), f^i]\int d\tilde{q}_{\mathcal{O}}\,\delta\left((\delta^{ij}\partial^\mu + \kappa g c^{ikj}\bar{A}^{k\mu})A^j_\mu(\mathcal{O}, \tilde{q}) - f^i\right) = 1$$

und somit

$$\int d\tilde{q}_{\mathcal{O}}\,p(\mathcal{O}, \tilde{q}_{\mathcal{O}}) = \int df^i \exp\left\{-\frac{i}{\hbar c}\frac{1}{2\xi}\int d^4x\,(\tilde{f}^i(x))^2\right\} \equiv N_p\,. \tag{1.44}$$

Gleichung (1.40) ist also mit dem Ansatz (1.43) erfüllt.

Führen wir in (1.42) die Integration über f^i aus , so ergibt sich

$$P(\mathcal{O}, g_{\mathcal{O}}) \equiv \tilde{P}(A_\mu^k, \psi, \bar{\psi})$$

$$= \Delta[A_\mu^k] \exp\left\{-\frac{i}{\hbar c}\,\frac{1}{2\xi}\int d^4x\left[\left(\delta^{ij}\partial^\mu + \kappa g c^{ikj}\bar{A}^{k\mu}_{(x)}\right)\left(A^k_{\mu(x)} - \tilde{\kappa}\bar{A}^k_{\mu(x)}\right)\right]^2\right\} \tag{1.45}$$

mit

$$\Delta[A_\mu^k] = \Delta[A_\mu^k(\mathcal{O}, g_{\mathcal{O}})] = \bar{\Delta}\left[A_\mu^k(\mathcal{O}, g_{\mathcal{O}}), \left(\delta^{ij}\partial^\mu + \kappa g c^{ikj}\bar{A}^{k\mu}\right)A_\mu^j(\mathcal{O}, g_{\mathcal{O}})\right]$$

$$= \left\{\int d\tilde{g}_{\mathcal{O}}\,\delta\left[\left(\delta^{ij}\partial^\mu + \kappa g c^{ikj}\bar{A}^{k\mu}\right)\left(A_\mu^j(\mathcal{O}, \tilde{g}_{\mathcal{O}} \circ g_{\mathcal{O}}) - A_\mu^j(\mathcal{O}, g_{\mathcal{O}})\right)\right]\right\}^{-1}. \tag{1.46}$$

Setzen wir nun (1.45) in (1.39) ein , so erhalten wir

$$\langle O_+ | O_- \rangle^{J^{ext}, J, \eta, \bar{\eta}} = \frac{1}{\tilde{N}\cdot N_P}\int dA^{k\mu}\, d\psi\, d\bar{\psi}\;\Delta[A_\mu^k]$$

$$\cdot \exp\left\{+\frac{i}{\hbar c}\int d^4x\left[\mathcal{L}(x) - \frac{1}{2\xi}\left(\left(\delta^{ij}\partial^\mu + \kappa g c^{ikj}\bar{A}^{k\mu}\right)\left(A_\mu^j - \tilde{\kappa}\bar{A}_\mu^j\right)\right)^2\right]\right\}\Bigg|_{x^4 \to -ix_4}, \tag{1.47}$$

wobei $\mathcal{L}(x)$ die in (1.27) definierte Lagrangedichte und $\Delta[A_\mu^k]$ die in (1.46) definierte Funktionaldeterminante ist.
Um die Funktionaldeterminante (1.46) berechnen zu können , müssen wir wissen,wie sich die Felder unter beliebigen Eichtransformationen transformieren . Die $\psi(x)$ und $\bar{\psi}(x)$ transformieren sich definitionsgemäß nach Gleichungen (1.20a) und (1.20b) . Das Transformationsgesetz für $A_\mu^k(x)$ ergibt sich aus

der Forderung , daß sich die kovariante Ableitung $(\partial_\mu - ig_B t^k A^k_\mu)\psi$ von $\psi(x)$ wie $\psi(x)$ selbst transformiert. Insgesamt erhalten wir somit

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{-ig_B t^k \theta^k(x)} \psi(x) \equiv \psi[\theta](x), \quad (1.48a)$$

$$\bar{\psi}(x) \longrightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) e^{ig_B t^k \theta^k(x)} \equiv \bar{\psi}[\theta](x), \quad (1.48b)$$

$$t^k A^{k\mu}(x) \longrightarrow t^k A^{k\mu\prime}(x) = e^{-ig_B t^\ell \theta^\ell(x)} (t^k A^{k\mu}(x)) e^{ig_B t^m \theta^m(x)} + \frac{i}{g_B} e^{-ig_B t^k \theta^k(x)} \partial^\mu e^{ig_B t^\ell \theta^\ell(x)} \equiv t^k A^{k\mu}[\theta](x). \quad (1.48c)$$

Setzen wir (1.48) in (1.46) ein , so ergibt sich

$$\Delta[A^k_\mu] = \left\{ \int d\theta^i \mu[\theta^i] \delta\left((\delta^{ik}\partial_\mu + \kappa g c^{ijk} \bar{A}^j_\mu)(A^{k\mu}[\theta] - A^{k\mu}) \right) \right\}^{-1}, \quad (1.49)$$

wobei $A^{k\mu}[\theta]$ durch Gleichung (1.48c) gegeben ist. Das invariante Maß $\mu[\theta]$ ist durch

$$\int d\tilde{\theta}^i \mu[\tilde{\theta}^i] F[e^{-ig_B t^k \tilde{\theta}^k(x)} e^{-ig_B t^k \theta^k(x)}] = \int d\tilde{\theta}^i \mu[\tilde{\theta}^i] F[e^{-ig_B t^k \tilde{\theta}^k(x)}] \quad (1.50)$$

für alle Funktionale $F[\varphi]$ und alle $\theta^k(x)$

definiert.

Mit Hilfe einer funktionalen Fouriertransformation läßt sich (1.49) auch in die Form

$$\left[\Delta[A^k_\mu]\right]^{-1} = \int dx^i d\theta^i \mu[\theta^i] \exp\left\{ i \int d^4x \, \chi^i(x) (\delta^{ik}\partial_\mu + \kappa g c^{ijk} \bar{A}^j_\mu(x))(A^{k\mu}[\theta] - A^{k\mu}) \right\} \quad (1.51)$$

bringen.

Machen wir den Ansatz

$$A_\mu^k[\theta] = A_\mu^k - (\delta^{kl}\partial_\mu + g_B c^{kjl} A_\mu^j)\theta^l + \Gamma_\mu^k[\theta] \quad , \qquad (1.52)$$

so sehen wir mit Hilfe von (1.20c) und (1.48c), daß $\Gamma_\mu^k[\theta]$ als eine Potenzreihe in den θ^k geschrieben werden kann, die erst mit den quadratischen Gliedern in den θ^k beginnt.

$$\Gamma^{k\mu}[\theta] = \sum_{i=2}^{\infty} L^{k\mu}_{k_1,k_2,\dots,k_i}[A_\nu^\ell, \partial_\nu]\, \theta^{k_1}\theta^{k_2}\cdots\theta^{k_i} \quad . \qquad (1.53)$$

Hierbei sind die Koeffizienten $L^{k\mu}_{k_1,k_2,\dots,k_i}[A_\nu^\ell, \partial_\nu]$ dieser Potenzreihe Differentialoperatoren, die von A_μ^k abhängen. Setzen wir (1.52) in (1.51) ein, so erhalten wir

$$\left[\Delta[A_\mu^k]\right]^{-1} = \mu\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_1^k}\right] \exp\left\{ i \int d^4x \left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_2^k}\right](\delta^{kl}\partial_\mu + \kappa g c^{kml}\bar{A}_\mu^m)\Gamma^{l\mu}\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_1^\mu}\right]\right\}$$
$$\cdot \int d\chi^i d\theta^i \exp\left\{ i \int d^4x \left(-\chi^i(\delta^{ik}\partial_\mu + \kappa g c^{ijk}\bar{A}_\mu^j)\chi\delta^{kl}\partial^\mu + g_B c^{kml}A^{m\mu})\theta^l \right.\right.$$
$$\left.\left. + \chi^i j_2^i + j_1^i \theta^i \right)\right\}\Big|_{j_1=j_2=0} \qquad (1.54)$$

Nun definieren wir die Greensche Funktion D durch

$$D = \frac{1}{(1\partial_\mu - i\kappa g T_c^k \bar{A}_\mu^k)\chi(1\partial^\mu - i g_B T_c^k A^{k\mu})} \equiv D[A,\bar{A}] \qquad (1.55)$$

wobei die Matrizen T_c^k durch (1.9) gegeben sind.

Es ergibt sich dann

$$\left[\Delta[A_\mu^k]\right]^{-1} = \left[\det D\right]^{-1} \cdot \mu\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_1^k}\right] \exp\left\{ i \int d^4x \left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_2^k}\right](\delta^{kl}\partial_\mu + \kappa c^{kml}\bar{A}_\mu^m)\Gamma^{l\mu}\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_1^\mu}\right]\right\}$$
$$\cdot \exp\left\{ i \int d^4x d^4x' j_1^k(x) D^{kl}(x,x') j_2^l(x') \right\}\Big|_{j_1=j_2=0} \qquad (1.56)$$

Wir denken uns nun die von $\frac{\delta}{\delta j_1}$, $\frac{\delta}{\delta j_2}$ abhängigen Funktionen in (1.56) als Potenzreihe in $\frac{\delta}{\delta j_1}$, $\frac{\delta}{\delta j_2}$ und die von j_1, j_2 abhängige Exponentialfunktion als Exponentialreihe. Beachten wir, daß $\Gamma^{k\mu}$ erst mit den quadratischen Gliedern in $\frac{\delta}{\delta j_1}$ beginnt (vgl. (1.53)), so sehen wir, daß zu allen Ordnungen in dieser Reihenentwicklung

$$\left[\Delta[A_-^k]\right]^{-1} = \left[det\, D\right]^{-1} \cdot \mu[0] \tag{1.57}$$

gilt. Denn wir werten (1.56) ja an der Stelle $j_1 = j_2 = 0$ aus. Allerdings müssen wir hierzu noch zwei kritische Bemerkungen machen. Erstens ist es möglich, daß (1.51) Beiträge enthält, die in dieser Reihenentwicklung nicht mehr gesehen werden. Solche Beiträge wurden erstmals von Gribov untersucht. [15] Zum zweiten ist es möglich, daß die in (1.55) definierte Greensche Funktion gar nicht existiert. Dann wäre die Herleitung von (1.57) hinfällig. Betrachten wir (1.55) zunächst für den Fall $A^k_\mu = \bar{A}^k_\mu = 0$, so sehen wir, daß (1.55) nicht eindeutig ist. Aus den physikalischen Randbedingungen folgt jedoch, daß

$$D^{(0)} \equiv D[A=0, \bar{A}=0] = \frac{1}{1\partial^2 - i\varepsilon} = D_+^{(0)} \tag{1.58}$$

gelten muß. Für beliebige A^k_μ, $\bar{A}^k_\mu$ wird man deshalb

$$D[A,\bar{A}] = D_+^{(0)} + D_+^{(0)}\left[i\kappa g\, \tau_c^k \bar{A}^k_\mu \partial^\mu + i g_B\, \partial^\mu \tau_c^k A^k_\mu + \kappa g g_B\, \tau_c^k \bar{A}^k_\mu\, \tau_c^{k'} A^{k'\mu}\right] D[A,\bar{A}] \tag{1.59}$$

fordern.

Damit erfüllen wir einerseits (1.55), und andererseits garantiert uns dieser Ansatz, daß $D[A,\bar{A}]$ zu jeder Ordnung in Störungstheorie existiert. Wir wollen hier nur die Störungstheorie betrachten. Deshalb werden wir wohl mit (1.57) rechnen dürfen.

Mit Hilfe von Spin-0 Feldern φ und φ^*, die der Fermi-Statistik genügen sollen, läßt sich (1.57), nach geeigneter Wahl von $\mu[0]$, in die Form

$$\Delta[A^k_\mu] = \int d\varphi^* d\varphi \exp\left\{\frac{i}{\hbar c}\int d^4x\, \tilde{\mathcal{Z}}_3\Big[(\delta^{ik}\partial_\mu + \kappa g c^{ilk}\bar{A}^l_\mu)\varphi^{*k}\Big]\Big[(\delta^{ij}\partial^\mu + g_B c^{imj}A^{m\mu})\varphi^j\Big]\right\} \tag{1.60}$$

bringen. Die Felder φ und φ^* heißen Faddeev-Popov-Geister. [16]

Setzen wir (1.60) in (1.47) ein, so finden wir schließlich

$$\langle 0_+|0_-\rangle^{J^{ext},\mathfrak{J},\eta,\bar{\eta}} = \frac{1}{N}\int dA^{k\mu} d\varphi^* d\varphi\, d\bar{\psi} d\psi \exp\left\{\frac{i}{\hbar c}\int d^4x\Big[\tilde{\mathcal{L}}(x) + \Big(J^{k\,ext}_\mu(x) + J^k_\mu(x)\Big)A^{k\mu}(x) + \bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x)\Big]\right\}\Big|_{x^0\to -ix_4} \tag{1.61}$$

wobei

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}}(x) &= \mathcal{L}_{YM}(x) + \mathcal{L}_Q(x) + \mathcal{L}_I(x) \\ &\quad - \frac{1}{2\xi}\Big((\delta^{ij}\partial^\mu + \kappa g c^{ikj}\bar{A}^{k\mu})(A^j_\mu - \tilde{\kappa}\bar{A}^j_\mu)\Big)^2 \\ &\quad + \tilde{\mathcal{Z}}_3\Big[(\delta^{ik}\partial_\mu + \kappa g c^{ijk}\bar{A}^j_\mu)\varphi^{*k}\Big]\Big[(\delta^{il}\partial^\mu + g_B c^{iml}A^{m\mu})\varphi^l\Big].\end{aligned} \tag{1.62}$$

$\mathcal{L}_{YM}(x)$, $\mathcal{L}_Q(x)$, $\mathcal{L}_I(x)$ sind in (1.16) bis (1.19) definiert.

Aus rechentechnischen Gründen koppelt man auch die Faddeev-
-Popov-Geister φ und φ^* an anti-kommutierende c-Zahlen-Quellen β^* und β . Es ergibt sich damit für die Vakuum-Vakuum-Amplitude

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^{J^{ext},J,\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*} = W[J^{ext}+J, \bar{A}, \eta, \bar{\eta}, \beta, \beta^*] \qquad (1.63)$$

mit

$$W[J^{ext}+J, \bar{A}, \eta, \bar{\eta}, \beta, \beta^*] = \frac{1}{N} \int dA^{k\mu} d\varphi^* d\varphi d\bar{\psi} d\psi \qquad (1.64)$$

$$\exp\left\{\frac{i}{\hbar c}\int d^4x \left[\tilde{\mathcal{L}}(x) + \left(J_\mu^{k\,ext}(x) + J_\mu^k(x)\right) A^{k\mu}(x) \right.\right.$$

$$\left.\left. + \bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x) + \beta^{*k}(x)\varphi^k(x) + \varphi^{*k}(x)\beta(x)\right]\right\}\Big|_{x^0 \to -ix_4}$$

wobei $\tilde{\mathcal{L}}(x)$ die in (1.62) definierte Lagrangedichte ist . Das Feld $\bar{A}$ in (1.63) , (1.64) ist zunächst noch ein beliebig frei wählbares Hilfsfeld , das durch die spezielle Wahl der Verteilungsfunktion (1.42) in unseren Formeln Eingang gefunden hat . In den kovarianten Eichungen , die wir im ersten Abschnitt von Kapitel II behandeln werden , wird es gleich null gesetzt ; $\bar{A} = 0$. In den kovarianten Hintergrundeichungen hingegen übernimmt $\bar{A}$ die Rolle des sogenannten Hintergrundfeldes . In diesen Eichungen wird dann in dem Wegintegral in Gl. (1.64) die Substitution

$$A^{k\mu} \longrightarrow \tilde{\kappa}\,\bar{A}^{k\mu} + Q^{k\mu} \qquad (1.65)$$

durchgeführt . ($\tilde{\kappa}$ ist die Konstante die im "gauge fixing" Term in (1.62) steht .)

Es ergibt sich nun

$$W[J^{ext}+J,\bar{A},\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*] = \exp\left\{\frac{i}{\hbar c}\int d^4x\left[(J_\mu^{k\,ext}(x)+\tilde{J}_\mu(x))\tilde{\kappa}\bar{A}^{k\mu}(x)\right]\right\} \cdot W'[J^{ext}+J,\bar{A},\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*] \tag{1.66}$$

wobei

$$W'[J^{ext}+J,\bar{A},\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*] = \frac{1}{N}\int dQ^{k\mu}d\varphi^* d\varphi\, d\bar{\psi}\, d\psi\, \exp\left\{\frac{i}{\hbar c}\int d^4x\left[\hat{\mathcal{L}}(x) + (J_\mu^{k\,ext}(x)+\tilde{J}_\mu(x))Q^{k\mu}(x)+\bar{\eta}(x)\psi(x)+\bar{\psi}(x)\eta(x)+\beta^{*k}(x)\varphi^k(x)+\varphi^{*k}(x)\beta^k(x)\right]\right\}\Big|_{x^0\to -ix_4} \tag{1.67}$$

mit

$$\hat{\mathcal{L}}(x) = \mathcal{L}_{YM}[\tilde{\kappa}\bar{A}_\mu^k + Q_\mu^k;x] + \mathcal{L}_Q[\bar{\psi},\psi;x] + \mathcal{L}_I[\tilde{\kappa}\bar{A}_\mu^k+Q_\mu^k,\bar{\psi},\psi;x] + \mathcal{L}_{GF}(x) + \mathcal{L}_G[\bar{A}_\mu^k,\tilde{\kappa}\bar{A}_\mu^k+Q_\mu^k,\varphi^{*k},\varphi^k;x] \tag{1.68}$$

Hierbei sind

$$\mathcal{L}_{YM}[A_\mu^k;x] = -\frac{1}{4}Z_3\left(\partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g_B c^{ijk}A_\mu^i A_\nu^k\right)^2, \tag{1.69a}$$

$$\mathcal{L}_Q[\bar{\psi},\psi;x] = Z_2\,\bar{\psi}(x)[\hbar c\,\gamma_\mu i\partial^\mu - m_B c^2]\psi(x), \tag{1.69b}$$

$$\mathcal{L}_I[A_\mu^k,\bar{\psi},\psi;x] = Z_2\,\bar{\psi}(x)\hbar c\, q_B\gamma_\mu t^k A^{k\mu}(x)\psi(x), \tag{1.69c}$$

$$\mathcal{L}_{GF}(x) = -\frac{1}{2\xi}\left\{(\delta^{ik}\partial^\mu + \kappa g c^{ijk}\bar{A}^{j\mu}(x))Q_\mu^k(x)\right\}^2, \tag{1.69d}$$

$$\mathcal{L}_G[\bar{A}_\mu^k,A_\mu^k,\varphi^{*k},\varphi^k;x] = \tilde{Z}_3\left[(\delta^{ik}\partial_\mu+\kappa g c^{ijk}\bar{A}_\mu^j)\varphi^{*k}\right]\left[(\delta^{i\ell}\partial^\mu + g_B c^{im\ell}A^{m\mu})\varphi^\ell\right]. \tag{1.69e}$$

Renormierung

Um die Vakuum-Vakuum-Amplitude (1.66) mit der in (1.68) und (1.69) definierten Lagrangedichte zu berechnen, renormiert man die Kopplungskonstante und die Massenmatrix gemäß

$$g_B = X_g \, g \quad , \qquad [x] \tag{1.70}$$

$$m_B = m + Z_2^{-1} \delta m \, . \tag{1.71}$$

Für δm und die dimensionslosen Größen X_g, Z_3, $\tilde{Z}_3$, Z_2, κ, $\tilde{\kappa}$ macht man den Ansatz

$$X_g = 1 + \sum_{L=1}^{\infty} X_g^{(L)}(g) \, , \tag{1.72a}$$

$$Z_3 = 1 + \sum_{L=1}^{\infty} Z_3^{(L)}(g) \, , \tag{1.72b}$$

$$\tilde{Z}_3 = 1 + \sum_{L=1}^{\infty} \tilde{Z}_3^{(L)}(g) \, , \tag{1.72c}$$

$$Z_2 = 1 + \sum_{L=1}^{\infty} Z_2^{(L)}(g) \, , \tag{1.72d}$$

$$\kappa = \kappa_0 + \sum_{L=1}^{\infty} \kappa^{(L)}(g) \, , \tag{1.72e}$$

$$\tilde{\kappa} = \tilde{\kappa}_0 + \sum_{L=1}^{\infty} \tilde{\kappa}^{(L)}(g) \, , \tag{1.72f}$$

$$\delta m = \sum_{L=1}^{\infty} \delta m^{(L)}(g) \, . \tag{1.72g}$$

---

[x]) Die Kopplungskonstante wird häufig am Anti-Geist - Geist - Gluon Vertex renormiert; man schreibt dann auch $X_g = \tilde{Z}_1 / \tilde{Z}_3$.

Hierbei sind (1.72a-g) als Reihenentwicklungen nach der Anzahl L der "closed loops" zu verstehen. Die Koeffizienten dieser Reihen werden dann in Störungstheorie bestimmt.
Es stellt sich nun die Frage, ob das Funktional $W[j,\bar{A},\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*]$ auf diese Weise auch tatsächlich renormiert werden kann, d.h., ob die Koeffizienten der Reihen (1.72a-g) so gewählt werden können, daß es endlich wird. Soweit mir bekannt ist, gibt es hierfür für beliebige ξ keinen Beweis. Um eine Renormierbarkeit zu ereichen, muß möglicherweise der Quark-Gluon Vertex anders renormiert werden, d.h., man hat in (1.69c) die Kopplungskonstante g_B durch g_B^F zu ersetzen;

$$g_B \longrightarrow g_B^F \qquad \text{in (1.69c)}$$

wobei möglicherweise $g_B^F \neq g_B$ ist. Man renormiert dann g_B^F gemäß

$$g_B^F = X_g^F \, g = \frac{Z_1^F}{Z_2} \cdot g \qquad (1.70F)$$

und macht für X_g^F den Ansatz

$$X_g^F = 1 + \sum_{L=1}^{\infty} X_g^F(g) \quad . \qquad (1.72aF)$$

Für den Spezialfall der Landau-Eichung, $\xi \to 0$, läßt sich zeigen, daß man $g_B = g_B^F$ wählen kann. [17]

Eichungen

In den (gewöhnlichen) kovarianten Eichungen wählt man $\kappa = \tilde{\kappa} = 0$. Dies ist äquivalent zu $\bar{A} = 0$. In den kovarianten Hintergrundeichungen wählt man $\kappa_0 = \tilde{\kappa}_0 = 1$ in (1.72e,f).

Eigenschaften der Eichgruppen

Hier wollen wir noch einige Eigenschaften unserer Eichgruppen aufzählen. Wir betrachten nur halbeinfache kompakte Liegruppen; deshalb können wir die Generatoren so wählen, daß gilt

$$tr(t^a t^b) = C(t)\,\delta^{ab}\,, \tag{1.73}$$

$$tr(T_c^a T_c^b) = C(T_c)\,\delta^{ab}\,, \tag{1.74}$$

wobei C(t) und $C(T_c)$ reelle Konstanten sind. Zur Erinnerung sei nochmals gesagt, daß die t^k die Darstellungen der Generatoren im Quark Colour-Raum sind und die T_c^k durch (1.9) definiert sind. Wir interessieren uns hier speziell für die SU(N) als Eichgruppe. Dabei sollen die t^k die Generatoren der fundamentalen Darstellung der SU(N) sein. Wir können dann die Generatoren so wählen, daß gilt

$$tr(t^a t^b) = \tfrac{1}{2}\,\delta^{ab} \quad (a,b = 1,2,\dots,\mathcal{N})\,, \tag{1.73a}$$

$$tr(T_c^a T_c^b) = \mathcal{N}\,\delta^{ab} \quad (a,b = 1,2,\dots,\mathcal{N})\,, \tag{1.74a}$$

für die SU($\mathcal{N}$).

Für die Generatoren t^k werden wir im Folgenden auch T_t^k schreiben:

$$T_t^k \equiv t^k\,. \tag{1.75a}$$

Wohingegen die Matrizen T_c^k durch

$$(T_c^k)^{ij} = i\,c^{ikj} \tag{1.75b}$$

definiert waren.

SU(2):

Die Standardwahl für die Generatoren der SU(2) in der fundamentalen Darstellungen ist

$$T_t^i = t^i = \frac{1}{2}\sigma^i \tag{1.76}$$

mit den Pauli-Matrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.77}$$

Sie erfüllen

$$\left[\frac{1}{2}\sigma^i, \frac{1}{2}\sigma^j\right] = i\,\varepsilon^{ijk}\frac{1}{2}\sigma^k \tag{1.78}$$

Die Strukturkonstanten sind also

$$c^{ijk} = \varepsilon^{ijk} \tag{1.79}$$

Für die Generatoren der regulären Darstellung gilt deshalb

$$(T_c^j)^{ik} = i\,\varepsilon^{ijk} \tag{1.80}$$

Für einen beliebigen normierten Vektor $n^i = (n^1, n^2, n^3)$ mit

$$n^i n^i \equiv \sum_{i=1}^{3} n^i n^i = 1 \tag{1.81a}$$

hat die Matrix

$$\hat{n}_t \equiv n^i T_t^i \tag{1.81b}$$

die beiden Eigenwerte

$$\hat{n}'_{t(1)} = +\frac{1}{2}, \quad \hat{n}'_{t(2)} = -\frac{1}{2} \tag{1.81c}$$

Die Matrix

$$\hat{n}_c \equiv n^i T_c^i \tag{1.81d}$$

besitzt die drei Eigenwerte

$$\hat{n}'_{c(1)} = 1 \quad , \quad \hat{n}'_{c(2)} = -1 \quad , \quad \hat{n}'_{c(3)} = 0 \tag{1.81e}$$

SU(3):

Die Standardwahl für die Generatoren der SU(3) in der fundamentalen Darstellung ist

$$T_t^i = t^i = \tfrac{1}{2}\lambda^i \tag{1.82}$$

mit den Gell-Mann-Matrizen

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \quad , \quad \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \quad , \quad \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\lambda^4 = \begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} \quad , \quad \lambda^5 = \begin{pmatrix} 0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix}, \tag{1.83}$$

$$\lambda^6 = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \quad , \quad \lambda^7 = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix} \quad , \quad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

Sie erfüllen die Vertauschungsrelationen

$$\left[\tfrac{1}{2}\lambda^i \, , \, \tfrac{1}{2}\lambda^j\right] = i f^{ijk} \tfrac{1}{2}\lambda^k \tag{1.84}$$

Hierbei sind die total antisymmetrischen Strukturkonstanten f^{ijk} durch $f^{123}=1$, $f^{147}=1/2$, $f^{156}=-1/2$, $f^{246}=1/2$, $f^{257}=1/2$, $f^{345}=1/2$, $f^{367}=-1/2$, $f^{458}=\sqrt{3}/2$, $f^{678}=\sqrt{3}/2$ gegeben.

Die Strukturkonstanten der SU(3) sind also

$$c^{ijk} = f^{ijk} \quad . \tag{1.85}$$

Für einen beliebigen normierten Vektor $n^i = (n^1, n^2, \ldots, n^8)$ mit

$$n^i n^i \equiv \sum_{i=1}^{8} n^i n^i = 1 \tag{1.86a}$$

haben die Matrizen

$$\hat{n}_t \equiv n^i T_t{}^i \,, \tag{1.86b}$$

$$\hat{n}_c \equiv n^i T_c{}^i \tag{1.86c}$$

die Eigenwerte

$$\hat{n}'_{t(1)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\vartheta - \tfrac{2\pi}{3}) \,, \quad \hat{n}'_{t(2)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\vartheta - \tfrac{4\pi}{3}) \,, \quad \hat{n}'_{t(3)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin\vartheta \tag{1.86d}$$

und

$$\hat{n}'_{c(1)} = \cos\vartheta \,, \quad \hat{n}'_{c(2)} = -\cos\vartheta \,, \quad \hat{n}'_{c(3)} = 0 \,,$$

$$\hat{n}'_{c(4)} = -\cos(\vartheta - \tfrac{4\pi}{3}) \,, \quad \hat{n}'_{c(5)} = \cos(\vartheta - \tfrac{4\pi}{3}) \,, \tag{1.86e}$$

$$\hat{n}'_{c(6)} = \cos(\vartheta - \tfrac{2\pi}{3}) \,, \quad \hat{n}'_{c(7)} = -\cos(\vartheta - \tfrac{2\pi}{3}) \,, \quad \hat{n}'_{c(8)} = 0 \,.$$

Hierbei ist ϑ ein Winkel im Colour-Raum, der von der speziellen Wahl von n^i abhängt .

2. Die effektive Wirkung der Quantenchromodynamik

Die effektive Wirkung in den kovarianten Eichungen

In diesem Abschnitt wollen wir die effektive Wirkung in den kovarianten Eichungen betrachten. In den kovarianten Eichungen wählt man $\bar{A} = 0$. Spezielle Eichungen sind

$$\begin{aligned} \xi &\to 0 \quad \text{Landau-Eichung} , \\ \xi &= 1 \quad \text{Feynman-Eichung} , \\ \xi &= 3 \quad \text{Yennie-Eichung} . \end{aligned} \tag{2.1}$$

Das erzeugende Funktional aller Greenscher Funktionen in diesen Eichungen ist durch

$$W[J^{ext}+J, \eta, \bar{\eta}, \beta, \beta^*] = W[J^{ext}+J, \bar{A}, \eta, \bar{\eta}, \beta, \beta^*]\Big|_{\bar{A}=0} \tag{2.2}$$

gegeben. Hierbei ist $W[J^{ext}+J, \bar{A}, \eta, \bar{\eta}, \beta, \beta^*]$ durch (1.66) definiert. Die n-Punkt-Funktionen berechnen sich dann gemäß

$$\langle 0_+ | T\left(\underline{A}(x_1)\cdots\underline{A}(x_i)\underline{\bar{\psi}}(y_1)\cdots\underline{\bar{\psi}}(y_j)\underline{\psi}(z_1)\cdots\underline{\psi}(z_k)\underline{\varphi}^*(u_1)\cdots\underline{\varphi}^*(u_l)\underline{\varphi}(v_1)\cdots\underline{\varphi}(v_m)\right)|0_-\rangle^J$$

$$= \frac{\delta}{\delta j(x_1)}\cdots\frac{\delta}{\delta j(x_i)}\,\frac{-\delta}{\delta\eta(y_1)}\cdots\frac{-\delta}{\delta\eta(y_j)}\,\frac{+\delta}{\delta\bar{\eta}(z_1)}\cdots\frac{+\delta}{\delta\bar{\eta}(z_k)}\,\frac{-\delta}{\delta\beta(u_1)}\cdots\frac{-\delta}{\delta\beta(u_l)}\,\frac{+\delta}{\delta\beta^*(v_1)}\cdots\frac{+\delta}{\delta\beta^*(v_m)}\left(\frac{\hbar c}{i}\right)^{i+j+k+l+m} \tag{2.3}$$

$$W[j, \eta, \bar{\eta}, \beta, \beta^*]\Big|_{j=J^{ext},\,\eta=0=\bar{\eta},\,\beta=0=\beta^*}$$

In dieser Formel bezeichnen die $\underline{A}, \underline{\psi}, \underline{\bar{\psi}}, \underline{\varphi}^*, \underline{\varphi}$ die Operatorfelder. Das erzeugende Funktional der zusammenhängenden Greenschen Funktionen ist nun durch

$$Z[J^{ext}+J,\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*] = -i\hbar c \ln W[J^{ext}+J,\eta,\eta,\beta,\beta^*] \quad (2.4)$$

gegeben. Die zusammenhängenden n-Punkt-Funktionen berechnen sich gemäß

$$\langle 0_+ | T\left(\underline{A}(x_1)\cdots\underline{\varphi}(v_m)\right)|0_-\rangle_c^{J^{ext}} \quad (2.5)$$

$$= \frac{\delta}{\delta j(x_1)} \cdots \frac{+\delta}{\delta\beta^*(v_m)} Z[j,\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*]\Big|_{\substack{j=J^{ext}\\ \eta=0=\bar{\eta}\\ \beta=0=\beta^*}} .$$

Die effektive Wirkung wird nun durch

$$\Gamma[\langle A\rangle,\langle\bar{\psi}\rangle,\langle\psi\rangle,\langle\varphi^*\rangle,\langle\varphi\rangle] = Z[j,\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*] \quad (2.6)$$

$$-\int d^4x\left\{j^{k\mu}(x)\langle A^k_\mu(x)\rangle + \bar{\eta}(x)\langle\psi(x)\rangle + \langle\bar{\psi}(x)\rangle\eta(x) + \beta^{k*}(x)\langle\varphi^k(x)\rangle + \langle\varphi^{k*}(x)\rangle\beta^k(x)\right\}$$

definiert. Hierbei sind $j,\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*$ gemäß

$$\langle A^k_\mu(x)\rangle = \frac{\delta}{\delta j^{k\mu}(x)} Z[j,\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*] \quad , \quad (2.7a)$$

$$\langle\bar{\psi}(x)\rangle = \frac{-\delta}{\delta\eta(x)} Z[j,\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*] \quad , \quad (2.7b)$$

$$\langle\psi(x)\rangle = \frac{+\delta}{\delta\bar{\eta}(x)} Z[j,\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*] \quad , \quad (2.7c)$$

$$\langle\varphi^{k*}(x)\rangle = \frac{-\delta}{\delta\beta^k(x)} Z[j,\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*] \quad , \quad (2.7d)$$

$$\langle\varphi^k(x)\rangle = \frac{+\delta}{\delta\beta^{k*}(x)} Z[j,\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*] \quad (2.7e)$$

als Funktionale von $\langle A\rangle, \langle\bar\psi\rangle, \langle\psi\rangle, \langle\varphi^*\rangle, \langle\varphi\rangle$ aufzufassen.
Die physikalische Bedeutung der Felder $\langle A\rangle, \langle\bar\psi\rangle, \langle\psi\rangle, \langle\varphi^*\rangle, \langle\varphi\rangle$ erkennen wir, wenn wir (2.4) in (2.7a-e) einsetzen :

$$\langle A_\mu^k(x)\rangle = \langle 0_+ | \underline{A}_\mu^k(x) | 0_-\rangle^{j,\eta,\bar\eta,\beta,\beta^*} / \langle 0_+ | 0_-\rangle^{j,\eta,\bar\eta,\beta,\beta^*} , \tag{2.8a}$$

$$\langle \bar\psi(x)\rangle = \langle 0_+ | \underline{\bar\psi}(x) | 0_-\rangle^{j,\eta,\bar\eta,\beta,\beta^*} / \langle 0_+ | 0_-\rangle^{j,\eta,\bar\eta,\beta,\beta^*} , \tag{2.8b}$$

$$\langle \psi(x)\rangle = \langle 0_+ | \underline{\psi}(x) | 0_-\rangle^{j,\eta,\bar\eta,\beta,\beta^*} / \langle 0_+ | 0_-\rangle^{j,\eta,\bar\eta,\beta,\beta^*} , \tag{2.8c}$$

$$\langle \varphi^{k*}(x)\rangle = \langle 0_+ | \underline{\varphi}^{k*}(x) | 0_-\rangle^{j,\eta,\bar\eta,\beta,\beta^*} / \langle 0_+ | 0_-\rangle^{j,\eta,\bar\eta,\beta,\beta^*} , \tag{2.8d}$$

$$\langle \varphi^k(x)\rangle = \langle 0_+ | \underline{\varphi}^k(x) | 0_-\rangle^{j,\eta,\bar\eta,\beta,\beta^*} / \langle 0_+ | 0_-\rangle^{j,\eta,\bar\eta,\beta,\beta^*} . \tag{2.8e}$$

Die $\langle A\rangle, \langle\bar\psi\rangle, \langle\psi\rangle, \langle\varphi^*\rangle, \langle\varphi\rangle$ sind also die "Erwartungswerte" der Felder in Anwesenheit der äußeren Quellen $j, \eta, \bar\eta, \beta, \beta^*$.
Funktionale Differentation von Gl. (2.6) ergibt unter Berücksichtigung von (2.7a-e) :

$$\frac{\delta}{\delta\langle A_\mu^k(x)\rangle} \Gamma[\langle A\rangle, \langle\bar\psi\rangle, \langle\psi\rangle, \langle\varphi^*\rangle, \langle\varphi\rangle] = - j^{k\mu}(x) , \tag{2.9a}$$

$$\frac{+\delta}{\delta\langle \bar\psi(x)\rangle} \Gamma[\langle A\rangle, \langle\bar\psi\rangle, \langle\psi\rangle, \langle\varphi^*\rangle, \langle\varphi\rangle] = - \eta(x) , \tag{2.9b}$$

$$\frac{-\delta}{\delta\langle \psi(x)\rangle} \Gamma[\langle A\rangle, \langle\bar\psi\rangle, \langle\psi\rangle, \langle\varphi^*\rangle, \langle\varphi\rangle] = - \bar\eta(x) , \tag{2.9c}$$

$$\frac{+\delta}{\delta\langle \varphi^{k*}(x)\rangle} \Gamma[\langle A\rangle, \langle\bar\psi\rangle, \langle\psi\rangle, \langle\varphi^*\rangle, \langle\varphi\rangle] = - \beta^k(x) , \tag{2.9d}$$

$$\frac{-\delta}{\delta\langle \varphi^k(x)\rangle} \Gamma[\langle A\rangle, \langle\bar\psi\rangle, \langle\psi\rangle, \langle\varphi^*\rangle, \langle\varphi\rangle] = - \beta^{*k}(x) . \tag{2.9e}$$

Bei bekannter effektiver Wirkung $\Gamma[\langle A\rangle, \langle\bar\psi\rangle, \langle\psi\rangle, \langle\varphi^*\rangle, \langle\varphi\rangle]$ lassen sich deshalb die "Erwartungswerte" $\langle A\rangle, \langle\bar\psi\rangle, \langle\psi\rangle, \langle\varphi^*\rangle, \langle\varphi\rangle$ der Felder zu vorgegebenen äußeren Quellen $j, \eta, \bar\eta, \beta, \beta^*$ mit Hilfe von (2.9a-e) berechnen.

Die effektive Wirkung ist eine fundamentale Größe in jeder Quantenfeldtheorie; sie ist das erzeugende Funktional der "proper vertices" der Theorie.[x])

Zur praktischen Berechnung von W, Z und Γ bringt man W in die Form

$$W[j,\eta,\bar\eta,\beta,\beta^*] = \frac{1}{N}\int dQ^{k\mu}\,d\varphi^*\,d\varphi\,d\bar\psi\,d\psi\,\exp\Big\{\frac{i}{\hbar c}\int d^4x\Big[\mathcal{L}^I[Q,\bar\psi,\psi,\varphi^*,\varphi] + \tfrac{1}{2}Q^k_\mu\big(g^{\mu\nu}\partial_\sigma\partial^\sigma - (1-\tfrac{1}{\xi})\partial^\mu\partial^\nu\big)Q^k_\nu - \varphi^{*k}\partial_\sigma\partial^\sigma\varphi^k + \bar\psi\big[\hbar c\,\gamma_\mu i\partial^\mu - mc^2\big]\psi + j^{k\mu}Q^k_\mu + \bar\eta\psi + \bar\psi\eta + \beta^k\varphi^k + \varphi^{k*}\beta^k\Big]\Big\}\Big|_{x^0\to -ix_4} \tag{2.10}$$

mit

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^I[Q,\bar\psi,\psi,\varphi^*,\varphi] = {}& -\frac{1}{4}\Big[Z_3\,\tilde G^i_{\mu\nu}[Q]\,\tilde G^{i\mu\nu}[Q] - (\partial_\mu Q^k_\nu - \partial_\nu Q^k_\mu)(\partial^\mu Q^{k\nu} - \partial^\nu Q^{k\mu})\Big]\\ & + (Z_2-1)\,\bar\psi\,\hbar c\,\gamma_\mu i\partial^\mu\psi - \bar\psi\big[m_B c^2 Z_2 - mc^2\big]\psi\\ & + Z_2\,\hbar c\,g_B\,\bar\psi\,\gamma_\mu\,t^k\,\psi\,Q^{k\mu}\\ & + (\tilde Z_3 - 1)(\partial_\mu\varphi^{*i})(\partial^\mu\varphi^i) + \tilde Z_3\,(\partial_\mu\varphi^{*i})\,g_B\,c^{ik\ell}\,Q^{k\mu}\,\varphi^\ell\end{aligned} \tag{2.11}$$

---

x) Dies wird etwa in §16 von [14] erklärt.

wobei

$$\tilde{G}^{i}_{\mu\nu}[Q] = \partial_\mu Q^{i}_{\nu} - \partial_\nu Q^{i}_{\mu} + g_B c^{ijk} Q^{j}_{\mu} Q^{k}_{\nu} \quad .$$

Führen wir die Wegintegrale in Gl. (2.10) aus , so finden wir

$$W[j,\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*] = N^{-1} e^{L} \exp\left\{\frac{i}{\hbar c}\int d^4x \mathcal{L}^{I}\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j}, \frac{1}{i}\frac{-\delta}{\delta\eta}, \frac{1}{i}\frac{+\delta}{\delta\bar{\eta}}, \frac{1}{i}\frac{-\delta}{\delta\beta}, \frac{1}{i}\frac{+\delta}{\delta\beta^*}\right]\right\}$$

$$W^{(0)}[j,\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*]\Big|_{x^0\to -ix_4} \qquad (2.12)$$

mit

$$W^{(0)}[j,\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*] = \exp\left\{\frac{i}{\hbar c}\int d^4x\, d^4y \left[-\frac{1}{2} j^{k}_{\mu}(x)\Delta_{+}^{Y.M.\,\mu\nu}(x-y) j^{k}_{\nu}(y)\right.\right.$$

$$\left.\left. + \beta^{*k}(x)\Delta_{+}^{F.P.}(x-y)\beta^{k}(y) + \bar{\eta}(x) G_{+}(x-y)\eta(y)\right]\right\} \qquad (2.13)$$

und

$$L = -\frac{1}{2} Tr \ln \Delta_{+}^{Y.M.} + Tr \ln \Delta_{+}^{F.P.} + Tr \ln G_{+} \quad . \qquad (2.14)$$

Hierbei sind die Greenschen Funktionen $\Delta_{+}^{Y.M.\,\mu\nu}$, $\Delta_{+}^{F.P.}$ und G_{+} durch die folgenden Gleichungen definiert.

$$\left\{g^{\varrho}{}_{\mu}\,\partial_\varrho\partial^\varrho - (1-\tfrac{1}{\xi})\partial^\varrho\partial_\mu\right\}\Delta_{+}^{Y.M.\,\mu}{}_{\nu}(x-x') = g^{\varrho}{}_{\nu}\,\delta(x-x') , \qquad (2.15a)$$

$$\partial_\mu\partial^\mu \Delta_{+}^{F.P.}(x-x') = \delta(x-x') , \qquad (2.15b)$$

$$\left\{-i\hbar c\,\gamma_\mu\partial^\mu + mc^2\right\} G_{+}(x-x') = \delta(x-x') \quad . \qquad (2.15c)$$

Setzen wir (1.70), (1.71) und (1.72a-e) in $\mathcal{L}^{I}$ ein und entwickeln dann den Exponenten in (2.12) in eine Reihe nach der Kopplungskonstanten, so läßt sich $W[j, \eta, \bar{\eta}, \beta, \beta^*]$ als eine Summe von Feynman-Graphen darstellen. Das durch (2.4) definierte Funktional $Z[j, \eta, \bar{\eta}, \beta, \beta^*]$ wird nun dadurch berechnet, daß man alle verbundene Graphen aufsummiert. Die effektive Wirkung $\Gamma[\langle A\rangle, \langle\bar{\varphi}\rangle, \langle\psi\rangle, \langle\varphi^*\rangle, \langle\varphi\rangle]$ erhält man indem man alle Ein-Teilchen irreduziblen (1PI) Graphen aufsummiert und dabei

$$
\begin{aligned}
j^{\mu k}(x) &\longrightarrow -\left(\Delta_+^{\text{T.H.}\,-1}\right)^{\mu}{}_{\nu}\,\langle A^{k\nu}(x)\rangle \\
\bar{\eta}(x) &\longrightarrow \langle\bar{\psi}(x)\rangle\, G_+^{-1} \\
\eta(x) &\longrightarrow G_+^{-1}\,\langle\psi(x)\rangle \\
\beta^{*k}(x) &\longrightarrow \langle\varphi^{ak}(x)\rangle\left(\Delta_+^{\text{F.P.}}\right)^{-1} \\
\beta^{k}(x) &\longrightarrow \left(\Delta_+^{\text{F.P.}}\right)^{-1}\langle\varphi^{k}(x)\rangle
\end{aligned}
\qquad (2.16)
$$

für die Quellen substituiert. (Ein 1PI Graph ist ein verbundener Graph, der nicht durch das Zerschneiden einer inneren Linie in zwei getrennte Teile zerfällt. Eine innere Linie ist eine Linie, (die einen Propagator darstellt und) die nicht direkt von einer Quelle $j, \eta, \bar{\eta}, \beta, \beta^*$ ausgeht.)

Die effektive Wirkung in den kovarianten Hintergrundseichungen

A. Die Methode von Kluberg-Stern und Zuber

In diesem Abschnitt soll nun die effektive Wirkung in den kovarianten Hintergrundseichungen nach der Methode von Kluberg-Stern und Zuber [18] behandelt werden.

Hier wählt man nun

$$\kappa_0 = \tilde{\kappa}_0 = 1 \tag{2.17}$$

in (1.72e.f) und berechnet das Funktional $W'[j,\bar{A},\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*]$, das in (1.67) definiert ist, mit Hilfe der dimensionalen Regularisierung und bestimmt die Counter-Terme nach der "minimal subtraction rule". Dabei wird $\bar{A}$ als unabhängiges Hintergrundfeld betrachtet. (j steht abkürzend für $J^{ext}+J$: $j = J^{ext} + J$.) Es ergibt sich dann

$$\kappa = 1 \,, \tag{2.17a}$$

$$\tilde{\kappa} = X_g^{-1} = g/g_B = \tilde{Z}_3/\tilde{Z}_1 \,. \tag{2.17b}$$

Die Konstante $\tilde{\kappa}$ wird deshalb unendlich sein, solange man Störungstheorie betreibt – und zwar für beliebige Eichparameter, $\xi \geq 0$.

Wegen (1.65) ist dann das gesamte Operator-Feld $\underline{A}$ mit dem Quanten-Operator-Feld $\underline{Q}$ durch

$$\underline{A}^k_\mu(x) = \tilde{\kappa}\bar{A}^k_\mu(x) + \underline{Q}^k_\mu(x) = g/g_B\ \bar{A}^k_\mu(x) + \underline{Q}^k_\mu(x) \tag{2.18}$$

verknüpft.

Das Funktional W' ist das erzeugende Funktional der n-Punkt--Funktionen mit $\underline{Q}$ als Operator-Feld für die Gluonen :

$$\langle 0_+ | T\left(\underline{Q}(x_1)\cdots\underline{Q}(x_i)\underline{\bar\psi}(y_1)\cdots\underline{\bar\psi}(y_j)\underline{\psi}(z_1)\cdots\underline{\psi}(z_k)\underline{\varphi^*}(u_1)\cdots\underline{\varphi^*}(u_l)\underline{\varphi}(v_1)\cdots\underline{\varphi}(v_m)\right)|0_-\rangle^{J^{ext}}$$

$$=\left(\frac{\hbar c}{i}\right)^{i+j+k+l+m}\frac{\delta}{\delta j(x_1)}\cdots\frac{\delta}{\delta j(x_i)}\frac{-\delta}{\delta\eta(y_1)}\cdots\frac{-\delta}{\delta\eta(y_j)}\frac{+\delta}{\delta\bar\eta(z_1)}\cdots\frac{+\delta}{\delta\bar\eta(z_k)}$$

$$\frac{-\delta}{\delta\beta(u_1)}\cdots\frac{-\delta}{\delta\beta(u_l)}\frac{+\delta}{\delta\beta^*(v_1)}\cdots\frac{+\delta}{\delta\beta^*(v_m)}W'[j,\bar A,\eta,\bar\eta,\beta,\beta^*]\Big|_{\substack{j=J^{ext}\\ \eta=0=\bar\eta\\ \beta=0=\beta^*}} \qquad (2.19)$$

Das erzeugende Funktional der zusammenhängenden Greenschen Funktionen ist nun durch

$$Z'[j,\bar A,\eta,\bar\eta,\beta,\beta^*] = -i\hbar c\ln W'[j,\bar A,\eta,\bar\eta,\beta,\beta^*] \qquad (2.20)$$

gegeben . Die zusammenhängenden n-Punkt-Funktionen berechnen sich gemäß

$$\langle 0_+ | T\left(\underline{Q}(x_1)\cdots\cdots\underline{\varphi}(v_m)\right)|0_-\rangle_c^{J^{ext}} \qquad (2.21)$$

$$=\frac{\delta}{\delta j(x_1)}\cdots\cdots\frac{+\delta}{\delta\beta^*(v_m)}Z'[j,\bar A,\eta,\bar\eta,\beta,\beta^*]\Big|_{\substack{j=J^{ext}\\ \eta=0=\bar\eta\\ \beta=0=\beta^*}}$$

Die effektive Wirkung wird nun durch

$$\Gamma'[\langle Q\rangle,\bar A,\langle\bar\psi\rangle,\langle\psi\rangle,\langle\varphi^*\rangle,\langle\varphi\rangle] = Z'[j,\bar A,\eta,\bar\eta,\beta,\beta^*] \qquad (2.22)$$

$$-\int d^4x\left\{j^{k\mu}(x)\langle Q^k_\mu(x)\rangle+\bar\eta(x)\langle\psi(x)\rangle+\langle\bar\psi(x)\rangle\eta(x)+\beta^{*k}(x)\langle\varphi^k(x)\rangle+\langle\varphi^{*k}(x)\rangle\beta^k(x)\right\}$$

definiert .

Hierbei sind $j, \eta, \bar{\eta}, \beta, \beta^*$ gemäß

$$\langle Q_\mu^k(x) \rangle = \frac{\delta}{\delta j^{k\mu}(x)} Z'[j, \bar{A}, \eta, \bar{\eta}, \beta, \beta^*] , \tag{2.23a}$$

$$\langle \bar{\psi}(x) \rangle = \frac{-\delta}{\delta \eta(x)} Z'[j, \bar{A}, \eta, \bar{\eta}, \beta, \beta^*] , \tag{2.23b}$$

$$\langle \psi(x) \rangle = \frac{+\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} Z'[j, \bar{A}, \eta, \bar{\eta}, \beta, \beta^*] , \tag{2.23c}$$

$$\langle \varphi^{k*}(x) \rangle = \frac{-\delta}{\delta \beta^k(x)} Z'[j, \bar{A}, \eta, \bar{\eta}, \beta, \beta^*] , \tag{2.23d}$$

$$\langle \varphi^k(x) \rangle = \frac{+\delta}{\delta \beta^{*k}(x)} Z'[j, \bar{A}, \eta, \bar{\eta}, \beta, \beta^*] \tag{2.23e}$$

als Funktionale von $\langle Q \rangle, \langle \bar{\psi} \rangle, \langle \psi \rangle, \langle \varphi^* \rangle, \langle \varphi \rangle, \bar{A}$ aufzufassen. Die physikalische Bedeutung der Felder $\langle Q \rangle, \langle \bar{\psi} \rangle, \langle \psi \rangle, \langle \varphi^* \rangle, \langle \varphi \rangle$ erkennen wir, wenn wir (2.20) in (2.23a-e) einsetzen :

$$\langle Q_\mu^k(x) \rangle = \langle 0_+ | \underline{Q}_\mu^k(x) | 0_- \rangle^{j,\bar{A},\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*} / \langle 0_+ | 0_- \rangle^{j,\bar{A},\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*} , \tag{2.24a}$$

$$\langle \bar{\psi}(x) \rangle = \langle 0_+ | \underline{\bar{\psi}}(x) | 0_- \rangle^{j,\bar{A},\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*} / \langle 0_+ | 0_- \rangle^{j,\bar{A},\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*} , \tag{2.24b}$$

$$\langle \psi(x) \rangle = \langle 0_+ | \underline{\psi}(x) | 0_- \rangle^{j,\bar{A},\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*} / \langle 0_+ | 0_- \rangle^{j,\bar{A},\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*} , \tag{2.24c}$$

$$\langle \varphi^{*k}(x) \rangle = \langle 0_+ | \underline{\varphi}^{*k}(x) | 0_- \rangle^{j,\bar{A},\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*} / \langle 0_+ | 0_- \rangle^{j,\bar{A},\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*} , \tag{2.24d}$$

$$\langle \varphi^k(x) \rangle = \langle 0_+ | \underline{\varphi}^k(x) | 0_- \rangle^{j,\bar{A},\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*} / \langle 0_+ | 0_- \rangle^{j,\bar{A},\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*} . \tag{2.24e}$$

Die $\langle Q \rangle, \langle \bar{\psi} \rangle, \langle \psi \rangle, \langle \varphi^* \rangle, \langle \varphi \rangle$ sind also die "Erwartungswerte" der Felder in Anwesenheit der äußeren Quellen $j, \bar{A}, \eta, \bar{\eta}, \varphi, \varphi^*$.

Die effektive Wirkung ist auch hier das erzeugende Funktional der "proper vertices" der Theorie.
Kluberg-Stern und Zuber untersuchten in ihren Arbeiten nur den Fall einer reinen Eichtheorie ohne Fermi-Felder.
Sie zeigten, daß dann die entsprechende effektive Wirkung $\Gamma'[\langle Q\rangle, \bar{A}, \langle\varphi^*\rangle, \langle\varphi\rangle]$ unter den Eichtransformationen

$$\bar{A}^{k\mu}(x) \longrightarrow \bar{A}^{k\mu\prime}(x) = \bar{A}^{k\mu}(x) - \partial^\mu \theta^k(x) + g\, c^{klm}\, \theta^l(x)\, \bar{A}^{m\mu}(x), \quad (2.25a)$$

$$\langle Q^{k\mu}(x)\rangle \longrightarrow \langle Q^{k\mu}(x)\rangle' = \langle Q^{k\mu}(x)\rangle + g\, c^{klm}\, \theta^l(x) \langle Q^{m\mu}(x)\rangle, \quad (2.25b)$$

$$\langle \varphi^{*k}(x)\rangle \longrightarrow \langle \varphi^{*k}(x)\rangle' = \langle \varphi^{*k}(x)\rangle + g\, c^{klm}\, \theta^l(x) \langle \varphi^{*m}(x)\rangle, \quad (2.25c)$$

$$\langle \varphi^{k}(x)\rangle \longrightarrow \langle \varphi^{k}(x)\rangle' = \langle \varphi^{k}(x)\rangle + g\, c^{klm}\, \theta^l(x) \langle \varphi^{m}(x)\rangle \quad (2.25d)$$

invariant ist.
Diese Eichinvarianz ist einerseits sehr schön, andererseits hat man hierfür einen sehr hohen Preis zu bezahlen. Wegen (2.17b), $\tilde{\kappa} = g/g_B = \tilde{Z}_3/\tilde{Z}_1 = \infty$, ist die Vakuum-Vakuum Amplitude (1.66) nämlich nicht mehr endlich, da der Term

$$\exp\left\{\frac{i}{\hbar c}\int d^4x \left[(J_\mu^{k\,ext} + J_\mu^k)\tilde{\kappa}\, \bar{A}^{k\mu}\right]\right\} \equiv \exp\left\{\frac{i}{\hbar c}\int d^4x\; j_\mu^k(x)\tilde{\kappa}\, \bar{A}^{k\mu}(x)\right\}$$

in (1.66) nun unendlich wird. Fernerhin ist es auch nicht klar, ob es überhaupt zulässig ist, $\bar{A}$ als das Hintergrundfeld zu interpretieren. Wegen (2.18) sollte vielmehr

$$\tilde{\kappa}\, \bar{A}^{k\mu}(x) = g/g_B\, \bar{A}^{k\mu}(x) \quad \left(= \infty \quad \text{für} \quad \bar{A}^{k\mu}(x) \neq 0\right)$$

als das Hintergrundfeld angesehen werden.

B. Hintergrund eichung mit $\tilde{\kappa} = 1$

Hier soll nun eine andere mögliche Hintergrundeichung besprochen werden, in der die Schwierigkeiten, die am Ende des vorigen Abschnittes besprochen wurden, nicht auftauchen.
Man wählt hier definitionsgemäß

$$\tilde{\kappa} = 1 \tag{2.26a}$$

und

$$\kappa_0 = 1 \tag{2.26b}$$

in (1.72e) und berechnet das Funktional $W'[j, \bar{A}, \eta, \bar{\eta}, \beta, \beta^*]$, das in (1.67) definiert ist, mit Hilfe der dimensionalen Regularisierung. Nun ist es allerdings nicht mehr möglich, die Counter-Terme nach der "minimal subtraction rule" zu bestimmen. Mir ist leider kein Beweis bekannt, ob diese Methode überhaupt renormierbar ist. In der Ein-Loop-Approximation lassen sich hiermit jedenfalls endliche Resultate erzielen.
Wegen (1.65) und (2.26a) ist hier das gesamte Operator-Feld $\underline{A}$ mit dem Quanten-Operator-Feld $\underline{Q}$ durch

$$\underline{A}_\mu^k(x) = \bar{A}_\mu^k(x) + \underline{Q}_\mu^k(x) \tag{2.27}$$

verknüpft.
Die entsprechende effektive Wirkung wird hier allerdings nicht mehr unter den Transformationen (2.25a-d) invariant sein.

C. Die Methode von 't Hooft

In diesem Abschnitt soll nun auch noch die effektive Wirkung in den kovarianten Hintergrundseichungen nach 't Hooft [19] besprochen werden.

Ausgehend von dem Funktional $W[j,\bar{A},\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*]$, das in (1.66) definiert ist, führen wir das Funktional $Z[j,\bar{A},\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*]$ durch

$$W[j,\bar{A},\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*] = e^{\frac{i}{\hbar c} Z[j,\bar{A},\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*]} \tag{2.28}$$

ein. Nach 't Hooft wählen wir nun $\kappa_0 = \tilde{\kappa}_0 = 1$ in (1.72e,f) und

$$\bar{A} = \langle \tilde{A} \rangle = \langle \tilde{A} \rangle [j,\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*] \tag{2.29a}$$

wobei $\langle \tilde{A} \rangle$ durch

$$\langle \tilde{A}^k_\mu(x) \rangle = \frac{\delta}{\delta j^{k\mu}(x)} Z[j,\bar{A},\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*]\Big|_{\bar{A}=\langle \tilde{A} \rangle} \tag{2.29b}$$

$$+ \int d^4y \, \frac{\delta}{\delta \bar{A}^\ell_\nu(y)} Z[j,\bar{A},\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*]\Big|_{\bar{A}=\langle \tilde{A} \rangle} \frac{\delta \langle \tilde{A}^{\ell\nu}(y) \rangle}{\delta j^{k\mu}(x)}$$

definiert ist. $\bar{A}^k_\mu(x)$ wird also als Funktional von $j,\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*$ gewählt.

Das erzeugende Funktional aller Greenscher Funktionen wählt man dann als

$$\tilde{W}[j,\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*] = W[j,\langle \tilde{A} \rangle [j,\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*],\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*] \tag{2.30}$$

Das erzeugende Funktional der zusammenhängenden Greenschen

Funktionen ergibt sich dann zu

$$\tilde{Z}[j,\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*] = Z[j,\langle\tilde{A}\rangle[j,\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*],\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*] \quad . \qquad (2.31)$$

Es erfüllt die Gleichung

$$\tilde{Z}[j,\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*] = Z[j,\frac{\delta\tilde{Z}[j,\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*]}{\delta j},\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*] \quad . \qquad (2.32)$$

Für die n-Punkt-Funktionen gilt dann

$$\tilde{G}(x_1,\ldots,x_i;y_1,\ldots,y_j;z_1,\ldots z_k;u_1,\ldots,u_l;v_1,\ldots v_m\,|\,J^{ext})$$

$$=\left(\frac{\hbar c}{i}\right)^{i+j+k+l+m}\frac{\delta}{\delta j(x_1)}\cdots\frac{\delta}{\delta j(x_i)}\,\frac{-\delta}{\delta\eta(y_1)}\cdots\frac{-\delta}{\delta\eta(y_j)}\,\frac{+\delta}{\delta\bar{\eta}(z_1)}\cdots\frac{+\delta}{\delta\bar{\eta}(z_k)}$$

$$\frac{-\delta}{\delta\beta(u_1)}\cdots\frac{-\delta}{\delta\beta(u_l)}\,\frac{+\delta}{\delta\beta^*(v_1)}\cdots\frac{+\delta}{\delta\beta^*(v_m)}\,\tilde{W}[j,\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*]\Big|_{\substack{j=J^{ext}\\ \eta=0=\bar{\eta}\\ \beta=0=\beta^*}} \qquad (2.33a)$$

$$=\langle 0_+|T\left(\underline{A}(x_1)\cdots\underline{A}(x_i)\bar{\underline{\psi}}(y_1)\cdots\bar{\underline{\psi}}(y_j)\underline{\psi}(z_1)\cdots\underline{\psi}(z_k)\underline{\psi}^*(u_1)\cdots\underline{\psi}^*(u_l)\underline{\psi}(v_1)\cdots\underline{\psi}(v_m)\right)|0_-\rangle^{J^{ext}}$$

$$+\ \text{Eichterme} \quad . \qquad (2.33b)$$

Die zusammenhängenden n-Punktfunktionen ergeben sich dann zu

$$\tilde{G}(x_1,\ldots\ldots\ldots,v_m\,|\,J^{ext})_c$$

$$=\frac{\delta}{\delta j(x_1)}\cdots\cdots\frac{+\delta}{\delta\beta^*(v_m)}\,\tilde{Z}[j,\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*]\Big|_{\substack{j=J^{ext}\\ \eta=0=\bar{\eta},\ \beta=0=\beta^*}} \qquad (2.34a)$$

$$=\langle 0_+|T\left(\underline{A}(x_1)\cdots\cdots\underline{\psi}(v_m)\right)|0_-\rangle^{J^{ext}}\ +\ \text{Eichterme} \quad . \qquad (2.34b)$$

Die effektive Wirkung wird dann durch

$$\tilde{\Gamma}[\langle\tilde{A}\rangle,\langle\bar{\tilde{\psi}}\rangle,\langle\tilde{\psi}\rangle,\langle\tilde{\psi}^{*}\rangle,\langle\tilde{\chi}^{*}\rangle] = \tilde{Z}[j,\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^{*}] \qquad (2.35)$$

$$-\int d^{4}x\left\{ j^{k\mu}(x)\langle\tilde{A}^{k}_{\mu}(x)\rangle + \bar{\eta}(x)\langle\tilde{\psi}(x)\rangle + \langle\bar{\tilde{\psi}}(x)\rangle\eta(x) + \beta^{k*}(x)\langle\tilde{\chi}^{k}(x)\rangle + \langle\tilde{\psi}^{k*}(x)\rangle\beta^{k}(x)\right\}$$

definiert. Hierbei sind $j, \eta, \bar{\eta}, \beta, \beta^{*}$ gemäß

$$\langle\tilde{A}^{k}_{\mu}(x)\rangle = \frac{\delta}{\delta j^{k\mu}(x)}\tilde{Z}[j,\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^{*}] , \qquad (2.36a)$$

$$\langle\bar{\tilde{\psi}}(x)\rangle = \frac{-\delta}{\delta\eta(x)}\tilde{Z}[j,\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^{*}] , \qquad (2.36b)$$

$$\langle\tilde{\psi}(x)\rangle = \frac{+\delta}{\delta\bar{\eta}(x)}\tilde{Z}[j,\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^{*}] , \qquad (2.36c)$$

$$\langle\tilde{\psi}^{k*}(x)\rangle = \frac{-\delta}{\delta\beta^{k}(x)}\tilde{Z}[j,\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^{*}] , \qquad (2.36d)$$

$$\langle\tilde{\chi}^{k}(x)\rangle = \frac{+\delta}{\delta\beta^{k*}(x)}\tilde{Z}[j,\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^{*}] \qquad (2.36e)$$

als Funktionale von $\langle\tilde{A}\rangle, \langle\bar{\tilde{\psi}}\rangle, \langle\tilde{\psi}\rangle, \langle\tilde{\psi}^{*}\rangle, \langle\tilde{\chi}\rangle$ aufzufassen.

Die physikalische Bedeutung der Felder $\langle\tilde{A}\rangle, \langle\bar{\tilde{\psi}}\rangle, \langle\tilde{\psi}\rangle, \langle\tilde{\psi}^{*}\rangle, \langle\tilde{\chi}\rangle$ erkennen wir, wenn wir (2.31) und (2.28) in (2.36a-e) einsetzen.

$$\langle\tilde{A}^{k}_{\mu}(x)\rangle = \langle O_{+}|\underline{\tilde{A}}^{k}_{\mu}(x)|O_{-}\rangle^{j,\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^{*}} / \langle O_{+}|O_{-}\rangle^{j,\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^{*}} , \qquad (2.37a)$$

$$\langle\bar{\tilde{\psi}}(x)\rangle = \langle O_{+}|\underline{\bar{\tilde{\psi}}}(x)|O_{-}\rangle^{j,\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^{*}} / \langle O_{+}|O_{-}\rangle^{j,\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^{*}} , \qquad (2.37b)$$

$$\langle\tilde{\psi}(x)\rangle = \langle O_{+}|\underline{\tilde{\psi}}(x)|O_{-}\rangle^{j,\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^{*}} / \langle O_{+}|O_{-}\rangle^{j,\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^{*}} , \qquad (2.37c)$$

$$\langle\tilde{\psi}^{k*}(x)\rangle = \langle O_{+}|\underline{\tilde{\psi}}^{k*}(x)|O_{-}\rangle^{j,\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^{*}} / \langle O_{+}|O_{-}\rangle^{j,\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^{*}} , \qquad (2.37d)$$

$$\langle\tilde{\chi}^{k}(x)\rangle = \langle O_{+}|\underline{\tilde{\chi}}^{k}(x)|O_{-}\rangle^{j,\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^{*}} / \langle O_{+}|O_{-}\rangle^{j,\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^{*}} , \qquad (2.37e)$$

wobei die Operatoren $\tilde{\underline{A}}$, $\tilde{\underline{\bar{\Psi}}}$, $\tilde{\underline{\Psi}}$, $\tilde{\underline{\mathcal{Y}}}^*$, $\tilde{\underline{\mathcal{Y}}}$ durch

$$\tilde{\underline{A}}^{i\mu}(x) = \underline{A}^{i\mu}(x) + \int dy \, \frac{\delta^2 \tilde{Z}[j,\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*]}{\delta j_\mu^i(x)\, \delta j_\nu^k(y)} \, \tilde{\underline{J}}^k_\nu(y) \,, \tag{2.38a}$$

$$\tilde{\underline{\bar{\Psi}}}(x) = \underline{\bar{\Psi}}(x) + \int dy \, \frac{-\delta^2 \tilde{Z}[\cdots]}{\delta \eta(x)\, \delta j_\nu^k(y)} \, \tilde{\underline{J}}^k_\nu(y) \,, \tag{2.38b}$$

$$\tilde{\underline{\Psi}}(x) = \underline{\Psi}(x) + \int dy \, \frac{+\delta^2 \tilde{Z}[\cdots]}{\delta \bar{\eta}(x)\, \delta j_\nu^k(y)} \, \tilde{\underline{J}}^k_\nu(y) \,, \tag{2.38c}$$

$$\tilde{\underline{\mathcal{Y}}}^{i*}(x) = \underline{\mathcal{Y}}^{i*}(x) + \int dy \, \frac{-\delta^2 \tilde{Z}[\cdots]}{\delta \beta^i(x)\, \delta j_\nu^k(y)} \, \tilde{\underline{J}}^k_\nu(y) \,, \tag{2.38d}$$

$$\tilde{\underline{\mathcal{Y}}}^{i}(x) = \underline{\mathcal{Y}}^{i}(x) + \int dy \, \frac{+\delta^2 \tilde{Z}[\cdots]}{\delta \beta^{i*}(x)\, \delta j_\nu^k(y)} \, \tilde{\underline{J}}^k_\nu(y) \tag{2.38e}$$

mit dem "Eichstrom"-Operator

$$\tilde{\underline{J}}^{k\mu}(x) = \frac{\delta}{\delta \tilde{A}^k_\mu(x)} \int dy \, \tilde{\mathcal{L}}(y) \Big|_{\substack{\bar{A} = \langle \tilde{A} \rangle,\, A = \underline{A} \\ \bar{\Psi} = \underline{\bar{\Psi}},\, \Psi = \underline{\Psi},\, \mathcal{Y}^* = \underline{\mathcal{Y}}^*,\, \mathcal{Y} = \underline{\mathcal{Y}}}} \tag{2.39a}$$

$$= \kappa \tilde{Z}_3 g \, c^{kij} \underline{\mathcal{Y}}^{*i}(x) \left(\delta^{il} \partial^\mu + g_B \, c^{iml} \underline{A}^{m\mu}(x) \right) \underline{\mathcal{Y}}^{l}(x)$$

$$- \frac{1}{2\beta} \frac{\delta}{\delta \langle \tilde{A}^k_\mu(x) \rangle} \int dy \left\{ (\delta^{ij} \partial_\nu + \kappa g \, c^{ikj} \langle \tilde{A}^{k\nu}(y) \rangle)(\underline{A}^j_\nu(y) - \tilde{\kappa} \langle \tilde{A}^j_\nu(y) \rangle) \right\}^2 \tag{2.39}$$

definiert sind. Die $\underline{A}$, $\underline{\bar{\Psi}}$, $\underline{\Psi}$, $\underline{\mathcal{Y}}^*$, $\underline{\mathcal{Y}}$ sind die Operatorfelder, die schon im ersten Abschnitt in (2.3) und (2.5) verwendet wurden und $\tilde{\mathcal{L}}(y)$ ist die in (1.62) definierte Lagrangedichte. Die $\langle \tilde{A} \rangle, \langle \tilde{\bar{\Psi}} \rangle, \langle \tilde{\Psi} \rangle, \langle \tilde{\mathcal{Y}}^* \rangle, \langle \tilde{\mathcal{Y}} \rangle$ sind also bis auf einen Eichterm die "Erwartungswerte" der Operatorfelder $\underline{A}, \underline{\bar{\Psi}}, \underline{\Psi}, \underline{\mathcal{Y}}^*, \underline{\mathcal{Y}}$.

Mit Hilfe von (2.36a-e) läßt sich leicht zeigen, daß die effektive Wirkung (2.35) folgende Gleichungen erfüllt.

$$\frac{\delta}{\delta\langle\tilde{A}^k_\mu(x)\rangle}\,\tilde{\Gamma}[\langle\tilde{A}\rangle,\langle\bar{\tilde{\varphi}}\rangle,\langle\tilde{\varphi}\rangle,\langle\tilde{\varphi}^*\rangle,\langle\tilde{\varphi}\rangle] = -j^{k\mu}(x)\,, \qquad (2.40a)$$

$$\frac{+\delta}{\delta\langle\bar{\tilde{\varphi}}(x)\rangle}\,\tilde{\Gamma}[\langle\tilde{A}\rangle,\langle\bar{\tilde{\varphi}}\rangle,\langle\tilde{\varphi}\rangle,\langle\tilde{\varphi}^*\rangle,\langle\tilde{\varphi}\rangle] = -\eta(x)\,, \qquad (2.40b)$$

$$\frac{-\delta}{\delta\langle\tilde{\varphi}(x)\rangle}\,\tilde{\Gamma}[\langle\tilde{A}\rangle,\langle\bar{\tilde{\varphi}}\rangle,\langle\tilde{\varphi}\rangle,\langle\tilde{\varphi}^*\rangle,\langle\tilde{\varphi}\rangle] = -\bar{\eta}(x)\,, \qquad (2.40c)$$

$$\frac{+\delta}{\delta\langle\tilde{\varphi}^{*k}(x)\rangle}\,\tilde{\Gamma}[\langle\tilde{A}\rangle,\langle\bar{\tilde{\varphi}}\rangle,\langle\tilde{\varphi}\rangle,\langle\tilde{\varphi}^*\rangle,\langle\tilde{\varphi}\rangle] = -\beta^k(x)\,, \qquad (2.40d)$$

$$\frac{-\delta}{\delta\langle\tilde{\varphi}^k(x)\rangle}\,\tilde{\Gamma}[\langle\tilde{A}\rangle,\langle\bar{\tilde{\varphi}}\rangle,\langle\tilde{\varphi}\rangle,\langle\tilde{\varphi}^*\rangle,\langle\tilde{\varphi}\rangle] = -\beta^{*k}(x) \qquad (2.40e)$$

Bei bekannter effektiver Wirkung $\tilde{\Gamma}[\langle\tilde{A}\rangle,\langle\bar{\tilde{\varphi}}\rangle,\langle\tilde{\varphi}\rangle,\langle\tilde{\varphi}^*\rangle,\langle\tilde{\varphi}\rangle]$ lassen sich deshalb die "Erwartungswerte" $\langle\tilde{A}\rangle,\langle\bar{\tilde{\varphi}}\rangle,\langle\tilde{\varphi}\rangle,\langle\tilde{\varphi}^*\rangle,\langle\tilde{\varphi}\rangle$ der Felder zu vorgegebenen äußeren Quellen $j,\eta,\bar{\eta},\beta,\beta^*$ mit Hilfe von (2.40a-e) berechnen.

Berechnet man die effektive Wirkung $\tilde{\Gamma}[\langle\tilde{A}\rangle,\langle\bar{\tilde{\varphi}}\rangle,\langle\tilde{\varphi}\rangle,\langle\tilde{\varphi}^*\rangle,\langle\tilde{\varphi}\rangle]$ in der Ein-Loop-Approximation, so findet man, daß

$$\kappa = 1\,, \qquad (2.41a)$$

$$\tilde{\kappa} = 1\,, \qquad (2.41b)$$

$$g_B = g \qquad (2.41c)$$

in der Ein-Loop-Approximation gewählt werden kann.[20] Damit ergibt sich, daß die Ein-Loop-Approximation der effektiven Wirkung $\tilde{\Gamma}[\langle\tilde{A}\rangle,\langle\bar{\tilde{\varphi}}\rangle,\langle\tilde{\varphi}\rangle,\langle\tilde{\varphi}^*\rangle,\langle\tilde{\varphi}\rangle]$ unter den folgenden Eichtransformationen invariant ist.

$$\langle \tilde{A}^{k\mu}(x)\rangle \longrightarrow \langle \tilde{A}^{k\mu}(x)\rangle' = \langle \tilde{A}^{k\mu}(x)\rangle - \partial^{\mu}\theta^{k}(x) + g c^{klm}\theta^{\ell}(x)\langle \tilde{A}^{m\mu}(x)\rangle, \quad (2.42a)$$

$$\langle \tilde{\varphi}^{k}(x)\rangle \longrightarrow \langle \tilde{\varphi}^{k}(x)\rangle' = \langle \tilde{\varphi}^{k}(x)\rangle + g c^{klm}\theta^{\ell}(x)\langle \tilde{\varphi}^{m}(x)\rangle, \quad (2.42b)$$

$$\langle \tilde{\varphi}^{*k}(x)\rangle \longrightarrow \langle \tilde{\varphi}^{*k}(x)\rangle' = \langle \tilde{\varphi}^{*k}(x)\rangle - \langle \tilde{\varphi}^{*m}(x)\rangle g c^{mlk}\theta^{k}(x), \quad (2.42c)$$

$$\langle \bar{\tilde{\psi}}(x)\rangle \longrightarrow \langle \bar{\tilde{\psi}}(x)\rangle' = \langle \bar{\tilde{\psi}}(x)\rangle \exp\{ig t^{k}\theta^{k}(x)\}, \quad (2.42d)$$

$$\langle \tilde{\psi}(x)\rangle \longrightarrow \langle \tilde{\psi}(x)\rangle' = \exp\{-ig t^{k}\theta^{k}(x)\}\langle \tilde{\psi}(x)\rangle . \quad (2.42e)$$

Ob (2.41a-c) zu allen Ordnungen in der Entwicklung nach den "closed loops" gilt, ist mir nicht bekannt. Dies wäre wünschenswert, weil dann die exakte effektive Wirkung unter den Eichtransformationen (2.42a-e) invariant wäre.

Im Folgenden wollen wir die effektive Wirkung nur für den Spezialfall betrachten, wenn die äußeren Fermi-Quellen η, $\bar{\eta}$, β^{k}, β^{*k} gleich null sind. Insbesondere sollen auch $\langle\bar{\tilde{\psi}}\rangle$, $\langle\tilde{\psi}\rangle$ $\langle\tilde{\varphi}^{*k}\rangle$, $\langle\tilde{\varphi}^{k}\rangle$ verschwinden. Wir schreiben dann abkürzend $\tilde{\Gamma}[\langle\tilde{A}\rangle]$ für die effektive Wirkung. Gemäß (2.35) ist sie gegeben durch

$$\tilde{\Gamma}[\langle\tilde{A}\rangle] = \tilde{Z}[j,0,0,0,0] - \int d^{4}x\, j^{k\mu}(x)\langle\tilde{A}^{k}_{\mu}(x)\rangle . \quad (2.43)$$

Hierbei ist j als Funktional von $\langle\tilde{A}^{k}_{\mu}(x)\rangle$ aufzufassen:

$$\langle\tilde{A}^{k}_{\mu}(x)\rangle = \frac{\delta}{\delta j^{k\mu}(x)} Z[j,\bar{A},0,0,0,0]\Big|_{\bar{A}=\langle\tilde{A}\rangle} + \int d^{4}y \frac{\delta}{\delta \bar{A}_{\nu}^{\ell}(y)} Z[j,\bar{A},0,0,0,0]\Big|_{\bar{A}=\langle\tilde{A}\rangle} \cdot \frac{\delta\langle\tilde{A}^{\ell\nu}(y)\rangle}{\delta j^{k\mu}(x)} \quad (2.44)$$

bzw.

$$\langle \tilde{A}^k_\mu(x) \rangle = \frac{\delta}{\delta j^{k\mu}(x)} \tilde{\tilde{Z}}[j,0,0,0,0] \tag{2.45}$$

oder

$$j^{k\mu}(x) = -\frac{\delta}{\delta \langle \tilde{A}^k_\mu(x) \rangle} \tilde{\tilde{\Gamma}}[\langle \tilde{A} \rangle] \tag{2.46}$$

Die Vakuum-Vakuum Amplitude im äußeren Feld

Als eine kleine Anwendung der vorigen Resultate, soll hier noch die Vakuum-Vakuum Amplitude in einem äußeren Feld betrachtet werden. Benützen wir (1.63), (2.28) und (2.43), so sehen wir, daß die Vakuum-Vakuum Amplitude in Anwesenheit eines äußeren Stroms J^{ext} durch

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle = \exp\left\{\frac{i}{\hbar c}\left(\tilde{\Gamma}[\langle\tilde{A}\rangle] + \int d^4x\, J^{k\,ext}_{\mu}(x)\langle\tilde{A}^k_{\mu}(x)\rangle\right)\right\} \qquad (2.47)$$

gegeben ist. Hierbei ist das Feld $\langle\tilde{A}\rangle$ mit dem Strom J^{ext} durch

$$\frac{\delta}{\delta\langle\tilde{A}^k_{\mu}(x)\rangle}\tilde{\Gamma}[\langle\tilde{A}\rangle] = -J^{k\,ext}_{\mu}(x) \qquad (2.48)$$

verknüpft.

Wir wollen hier die Vakuum-Vakuum Amplitude als Funktion des angelegten Feldes A^{cl}, das die klassischen Feldgleichungen

$$\frac{\delta}{\delta A^{k\mu\,cl}(x)} S[A^{cl}] = -J^{k\,ext}_{\mu}(x) \qquad (2.49)$$

mit

$$S[A^{cl}] = -\frac{1}{4}\int d^4x \left\{\partial_\mu A^{icl}_\nu - \partial_\nu A^{icl}_\mu + g c^{ijk} A^{jcl}_\mu A^{kcl}_\nu\right\}^2 \qquad (2.50)$$

erfüllt, berechnen. Dazu machen wir den Ansatz

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle = \exp\left\{\frac{i}{\hbar c}\left(\tilde{S}[A^{cl}] + \int d^4x\, J^{k\,ext}_{\mu}(x) A^{k\mu\,cl}(x)\right)\right\} \qquad (2.51)$$

mit einem zunächst noch unbekannten Funktional $\tilde{S}[A^{cl}]$.
Vergleichen wir (2.51) mit (2.47) , und benützen dabei (2.48) und (2.49) , so finden wir

$$\tilde{S}[A^{cl}] = \tilde{\Gamma}[A^{cl}+\Delta A] - \int d^4x \frac{\delta}{\delta A^{k\,cl}_{\mu}(x)} \tilde{\Gamma}[A^{cl}+\Delta A]\cdot \Delta A^{k}_{\mu}(x) \tag{2.52}$$

wobei ΔA durch

$$\frac{\delta}{\delta A^{k\,cl}_{\mu}(x)}\left(\tilde{\Gamma}[A^{cl}+\Delta A] - S[A^{cl}]\right) = 0 \tag{2.53}$$

definiert ist .
Mit Hilfe von (2.52) läßt sich nun leicht zeigen , daß $\tilde{S}[A^{cl}]$ in der Ein-Loop - Approximation durch

$$\tilde{S}[A^{cl}] \cong \tilde{\Gamma}[\langle\tilde{A}\rangle]\Big|_{\langle\tilde{A}\rangle = A^{cl}} + \cdots\cdots \tag{2.54}$$

gegeben ist .
Damit ergibt sich insbesondere für das Absolutsquadrat der Vakuum-Vakuum Amplitude in der Ein-Loop - Approximation

$$|\langle 0_+|0_-\rangle|^2 \cong exp\left\{-\frac{2}{\hbar c}\,\mathrm{Im}\,\tilde{\Gamma}[\langle\tilde{A}\rangle]\Big|_{\langle\tilde{A}\rangle = A^{cl}} + \cdots\cdots\right\} . \tag{2.55}$$

Folgen wir Schwinger [21] , so können wir

$$N = \frac{1}{c}\int d^4x\ \dot{n}(\vec{x},t) = \frac{2}{\hbar c}\,\mathrm{Im}\,\tilde{S}[A^{cl}] \cong \frac{2}{\hbar c}\,\mathrm{Im}\,\tilde{\Gamma}[\langle\tilde{A}\rangle]\Big|_{\langle\tilde{A}\rangle = A^{cl}} \tag{2.56}$$

als die Anzahl der Paare interpretieren , die in dem Feld A^{cl} produziert werden .

Das effektive Potential

Eine weitere wichtige Größe, die eng mit der effektiven Wirkung verknüpft ist, ist das effektive Potential V^{eff}. Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, daß die effektive Wirkung $\tilde{\Gamma}[\langle\tilde{A}\rangle]$ gegenüber der Eichtransformation (2.42a) invariant ist. (Wie wir schon erwähnt haben, ist dies für die Ein-Loop-Approximation der effektiven Wirkung jedenfalls zutreffend.) Dann muß sich die effektive Wirkung als Funktional von

$$\langle\tilde{G}^i_{\mu\nu}(x)\rangle \equiv \partial_\mu\langle\tilde{A}^i_\nu(x)\rangle - \partial_\nu\langle\tilde{A}^i_\mu(x)\rangle + g c^{ijk}\langle\tilde{A}^j_\mu(x)\rangle\langle\tilde{A}^k_\nu(x)\rangle \quad (2.57)$$

schreiben lassen:

$$\tilde{\Gamma}[\langle\tilde{A}\rangle] = \bar{\Gamma}[\langle\tilde{G}^i_{\mu\nu}\rangle] \,. \quad (2.58)$$

Nun definiert man die Lagrangedichte $\bar{\mathcal{L}}(\langle\tilde{G}^i_{\mu\nu}(x)\rangle)$ dadurch, daß

$$\bar{\Gamma}[\langle\tilde{G}^i_{\mu\nu}\rangle] = \int d^4x\, \bar{\mathcal{L}}(\langle\tilde{G}^i_{\mu\nu}(x)\rangle) \quad (2.59)$$

für konstante Felder $\langle\tilde{G}^i_{\mu\nu}\rangle$ gelten soll. Hierbei ist es wesentlich zu beachten, daß $\bar{\mathcal{L}}(\langle\tilde{G}^i_{\mu\nu}(x)\rangle)$ eine gewöhnliche Funktion (und kein Funktional) in den Feldern $\langle\tilde{G}^i_{\mu\nu}(x)\rangle$ sein soll.
Das effektive Potential ist dann durch

$$V^{eff}(\langle\tilde{G}^i_{\mu\nu}(x)\rangle) = \sum_{i,\mu} 2\langle\tilde{G}^i_{o\mu}(x)\rangle \frac{\partial\bar{\mathcal{L}}(\langle\tilde{G}^k_{o\mu}(x)\rangle)}{\partial\langle\tilde{G}^i_{o\mu}(x)\rangle} - \bar{\mathcal{L}}(\langle\tilde{G}^i_{\mu\nu}(x)\rangle) \quad (2.60)$$

definiert.

Wenn wir colour-elektrische und colour-magnetische Felder gemäß

$$\langle \tilde{\vec{E}}^i(x) \rangle^k = - \langle \tilde{G}^i_{ok}(x) \rangle \qquad (2.61a)$$

$$\langle \tilde{\vec{B}}^i(x) \rangle^k = \frac{1}{2} \varepsilon^{klm} \langle \tilde{G}^i_{lm}(x) \rangle \qquad (2.61b)$$

einführen, so läßt sich (2.60) auch als

$$V^{eff}(\langle \tilde{\vec{E}}^i \rangle, \langle \tilde{\vec{B}}^i \rangle) = \sum_i \langle \tilde{\vec{E}}^i \rangle \cdot \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}(\langle \tilde{\vec{E}}^i \rangle, \langle \tilde{\vec{B}}^i \rangle)}{\partial \langle \tilde{\vec{E}}^i \rangle} - \bar{\mathcal{L}}(\langle \tilde{\vec{E}}^i \rangle, \langle \tilde{\vec{B}}^i \rangle) \qquad (2.62)$$

schreiben.

3. Die Ein - Loop - Approximation

Allgemeine Theorie

In diesem Abschnitt wollen wir einen formalen Ausdruck für die Ein-Loop - Approximation der effektiven Wirkung $\tilde{\Gamma}[\langle\tilde{A}\rangle]$ herleiten. Benützen wir (1.66),(1.67),(2.28),(2.41a-c),(2.43) und (2.26), so finden wir, daß die effektive Wirkung $\tilde{\Gamma}[\langle\tilde{A}\rangle]$ durch

$$\exp\left\{\frac{i}{\hbar c}\tilde{\Gamma}[\langle\tilde{A}\rangle]\right\} = \frac{1}{N}\int dQ^{km}\,d\varphi^{*k}\,d\varphi^{k}\,d\bar{\psi}\,d\psi\,\exp\left\{\frac{i}{\hbar c}\int d^4x\left[\hat{\mathcal{L}}(x) - Q^{km}(x)\frac{\delta}{\delta\langle\tilde{A}^{km}(x)\rangle}\tilde{\Gamma}[\langle\tilde{A}\rangle]\right]\right\}\Bigg|_{\substack{x^0\to -ix_4\\ \bar{A}=\langle\tilde{A}\rangle,\ \kappa=\tilde{\kappa}=1\\ g_B=g}} \tag{3.1}$$

gegeben ist.

Hierbei ist $\hat{\mathcal{L}}(x)$ die in (1.68), (1.69a-e) definierte Lagrangedichte.

Wir sind hier in der Ein-Loop - Approximation interessiert, und können deshalb

$$Q^{km}(x)\frac{\delta\tilde{\Gamma}[\langle\tilde{A}\rangle]}{\delta\langle\tilde{A}^{km}(x)\rangle} \simeq Q^{km}(x)\frac{\delta S^{cl}[\langle\tilde{A}\rangle]}{\delta\langle\tilde{A}^{km}(x)\rangle}\quad , \tag{3.2}$$

mit der klassischen Wirkung

$$S^{cl}[\langle\tilde{A}\rangle] = -\frac{1}{4}\int d^4x\left\{\partial_\mu\langle\tilde{A}^i_\nu\rangle - \partial_\nu\langle\tilde{A}^i_\mu\rangle + g\,c^{ijk}\langle\tilde{A}^j_\mu\rangle\langle\tilde{A}^k_\nu\rangle\right\}^2 , \tag{3.3}$$

auf der rechten Seite von (3.1) approximieren.

In der Ein-Loop - Approximation finden wir dann

$$\exp\left\{\frac{i}{\hbar c}\tilde{\Gamma}[\langle\tilde{A}\rangle]\right\} = \frac{1}{N}\int dQ^{\ell m}\, d\varphi^{\ell}\, d\varphi^{\ell}\, d\bar{\psi}\, d\psi \exp\left\{ i\,\frac{1}{\hbar c}\, Z_3 S^{cl}[\langle\tilde{A}\rangle]\right.$$

$$+\frac{i}{\hbar c}\int d^4x\Big\{-\frac{1}{2}(\tilde{D}_\nu^{il}Q_\mu^{\ell})(\tilde{D}^{im\mu}Q^{m\nu}) + \frac{1}{2}(1-\xi^{-1})(\tilde{D}_\mu^{il}Q^{\ell\mu})(\tilde{D}_\nu^{im}Q^{m\nu})$$

$$+ Q^{i\mu}\, g c^{ikj}\langle\tilde{G}_{\mu\nu}^{k}\rangle Q^{j\nu} + (\tilde{D}_\mu^{il}\varphi^{\ell})(\tilde{D}^{im\mu}\varphi^{m})$$

$$\left.+\bar{\psi}\left[\hbar c\,\gamma_\mu i\tilde{D}_t^{\mu} - mc^2\right]\psi\Big\}\right\}\Big|_{x^0\to -ix_4} \qquad (3.4)$$

wobei

$$\tilde{D}_\mu^{ij} = \delta^{ij}\partial_\mu + g\,c^{ikj}\langle\tilde{A}_\mu^{k}\rangle = \delta^{ij}\partial_\mu - ig(T_c^{k})^{ij}\langle\tilde{A}_\mu^{k}\rangle \qquad (3.5)$$

$$\tilde{D}_t^{\mu} = \partial^{\mu} - ig\,T_t^{k}\langle\tilde{A}_\mu^{k}\rangle \qquad (3.6)$$

$$\langle\tilde{G}_{\mu\nu}^{k}\rangle = \partial_\mu\langle\tilde{A}_\nu^{k}\rangle - \partial_\nu\langle\tilde{A}_\mu^{k}\rangle + g\,c^{klm}\langle\tilde{A}_\mu^{\ell}\rangle\langle\tilde{A}_\nu^{m}\rangle \qquad (3.7)$$

Die Matrizen T_t und T_c sind in (1.75a,b) definiert.

Die Auswertung der Wegintegrale ergibt

$$\tilde{\Gamma}[\langle\tilde{A}\rangle] = Z_3\, S^{cl}[\langle\tilde{A}\rangle]$$

$$-i\hbar c\Big\{-\frac{1}{2}\int d^4x\; tr_c\, tr_L\langle x|\ln\left(\tilde{D}^2 - 2ig\,T_c^{k}\langle\tilde{G}^{k}\rangle + (\tfrac{1}{\xi}-1)\tilde{D}\tilde{D}\right)|x\rangle$$

$$+\int d^4x\; tr_c\,\langle x|\ln(\tilde{D}^2)|x\rangle \qquad (3.8)$$

$$+\int d^4x\; tr_c\, tr_\gamma\, tr_\Gamma\langle x|\ln(i\hbar c\,\gamma_\mu\tilde{D}_t^{\mu} - mc^2)|x\rangle\Big\}$$

$$+\ const. \qquad (x^0\to -ix_4)$$

Hierbei steht tr_L für die Spur über die Lorentz-Indizes, tr_c für die Spur im Colour-Raum, und tr_γ für die Spur bezüglich der γ-Matrizen. $\tilde{D}\tilde{D}$ ist durch

$$(\tilde{D}\tilde{D})^{\mu}{}_{\nu} = \tilde{D}^{\mu}\tilde{D}_{\nu} \tag{3.9}$$

definiert. Schließlich steht tr_F für die Spur über die Flavour-Indizes. Benützen wir (1.11) so erhalten wir deshalb

$$tr_F \ln(i\hbar c\gamma_\mu \tilde{D}_t^{\mu} - mc^2) = \sum_{k=1}^{N} \ln(i\hbar c\gamma_\mu \tilde{D}_t^{\mu} - m_k c^2) \tag{3.10}$$

Nun führen wir die Greenschen Funktionen durch

$$\Delta_+^{Y.M.}[A] = \frac{1}{D^2 - 2igT_c^k G^k + (\frac{1}{\xi} - 1)DD}\,, \tag{3.11}$$

$$\Delta_+^{F.P.}[A] = \frac{1}{D^2}\,, \tag{3.12}$$

$$G_+[m_k|A] = \frac{1}{-i\hbar c\gamma_\mu D_t^{\mu} + m_k c^2 - i\varepsilon}\,, \tag{3.13}$$

wobei

$$D^{\mu} = D^{\mu}[A] = \partial^{\mu} - igT_c^k A^{k\mu}\,, \tag{3.14a}$$

$$D_t^{\mu} = D_t^{\mu}[A] = \partial^{\mu} - igT_t^k A^{k\mu}\,, \tag{3.14b}$$

$$G^{k\mu}{}_{\nu} = G^{k\mu}{}_{\nu}[A] = \partial^{\mu}A_{\nu}^k - \partial_\nu A^{k\mu} + gc^{klm}A^{l\mu}A^{m}{}_{\nu}\,, \tag{3.15}$$

ein.

Es ergibt sich dann für die effektive Wirkung

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}[\langle\tilde{A}\rangle] = {} & Z_3\, S^{cl}[\langle\tilde{A}\rangle] \\
& + \frac{i}{2}\hbar c \int d^4x\, tr_c\, tr_L \left[ln\left(\Delta_+^{Y.M.}[\langle\tilde{A}\rangle]\right)^{-1}\right](x,x) \\
& - i\hbar c \int d^4x\, tr_c \left[ln\left(\Delta_+^{F.P.}[\langle\tilde{A}\rangle]\right)^{-1}\right](x,x) \\
& - i\hbar c \sum_{k=1}^{N} \int d^4x\, tr_c\, tr_\gamma \left[ln\left(G_+[m_k|\langle\tilde{A}\rangle]\right)^{-1}\right](x,x) \\
& + const. \qquad\qquad (x^0 \to -ix_4)
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Mit (3.16) haben wir nun einen kompakten Ausdruck für die effektive Wirkung in der Ein-Loop - Approximation gewonnen. Damit im Folgenden die Formeln nicht zu kompliziert werden, werden wir von nun an statt $\langle\tilde{A}\rangle$ nur noch kurz A schreiben.

$$
\langle \tilde{A}^k_\mu(x) \rangle \longrightarrow A^k_\mu(x) \quad , \tag{3.17}
$$

$$
\tilde{\Gamma}[\langle\tilde{A}\rangle] \longrightarrow \tilde{\Gamma}[A] \quad . \tag{3.18}
$$

Die Ein-Loop effektive Wirkung bis zur Ordnung g^2

In diesem Abschnitt wollen wir nun die Ein-Loop effektive Wirkung bis zur Ordnung g^2 diskutieren. Der Einfachheit halber wollen wir zunächst die Fermionen außer acht lassen. Nach Honerkamp [22] erhalten wir dann für den Realteil der Ein-Loop effektiven Wirkung bis zur Ordnung g^2 :

$$\tilde{\Gamma}[A] = -\frac{1}{4}\int d^4k\, G^{i}_{\mu\nu}(k) G^{i\mu\nu}(-k)\left\{1 + \frac{11\hbar c}{48\pi^2} C(T_c) g^2 \ln\frac{|\vec{k}^2 - k_0^2|}{\mu^2}\right\} \tag{3.19}$$

Hierbei ist $G^{i}_{\mu\nu}(k)$ die Fouriertransformierte von $G^{i}_{\mu\nu}(x)$

$$G^{i}_{\mu\nu}(k) = (2\pi)^{-2}\int d^4x\, e^{ikx}\, G^{i}_{\mu\nu}(x) \quad . \tag{3.20}$$

Die Konstante $C(T_c)$ ist in (1.74) und (1.74a) definiert.
Den Imaginärteil der effektiven Wirkung erhält man, indem man

$$\ln\left(|\vec{k}^2 - k_0^2|/\mu^2\right) \longrightarrow \ln\left\{(\vec{k}^2 + (k_4)^2)/\mu^2\right\}\Big|_{k_4 = e^{-i\pi/2}k^0}$$
$$= \ln\left(|\vec{k}^2 - k_0^2|/\mu^2\right) - i\pi\,\Theta(k_0^2 - \vec{k}^2) \tag{3.21}$$

in (3.19) substituiert. Insgesamt ergibt sich dann

$$\boxed{\tilde{\Gamma}[A] = -\frac{1}{4}\int d^4k\, G^{i}_{\mu\nu}(k) G^{i\mu\nu}(-k)\left\{1 + \frac{11}{48\pi^2} C(T_c) g^2 \hbar c\left[\ln\frac{|\vec{k}^2 - k_0^2|}{\mu^2} - i\pi\,\Theta(k_0^2 - \vec{k}^2)\right]\right\}} \tag{3.22}$$

für die Ein-Loop effektive Wirkung bis zur Ordnung g^2.
Wenn wir die colour-elektrischen und colour-magnetischen Felder $\vec{E}^i$ und $\vec{B}^i$ durch

$$(\vec{E}^i)^k = -G^i_{ok} \quad , (\vec{B}^i)^k = \frac{1}{2}\varepsilon^{klm} G^i_{lm} \tag{3.23}$$

einführen, so läßt sich (3.22) auch als

$$\tilde{\Gamma}[A] = -\frac{1}{2}\int d^4k \left(|\vec{B}^i(k)|^2 - |\vec{E}^i(k)|^2\right)\left\{1 + \frac{11}{48\pi^2} C(T_c) g^2 \ln\left[\ln\frac{|\vec{k}^2 - k_o^2|}{\mu^2} - i\pi\,\theta(k_o^2 - \vec{k}^2)\right]\right\}$$

(3.24)

schreiben. Zum Vergleich sei hier die effektive Wirkung der QED für masselose Elektronen mitgeteilt.

$$\tilde{\Gamma}[A]_{QED} = -\frac{1}{2}\int d^4k \left(|\vec{B}^2(k)| - |\vec{E}^2(k)|\right)\left\{1 - \frac{\alpha}{3\pi}\left[\ln\frac{|\vec{k}^2 - k_o^2|}{\mu^2} - i\pi\,\theta(k_o^2 - \vec{k}^2)\right]\right\}$$

(3.25)

Beachten wir, daß die Größe $|\vec{E}^2(k)| - |\vec{B}^2(k)|$ in der Elektrodynamik für $k_0^2 \geq \vec{k}^2$ nie negativ wird, so sehen wir, daß der Imaginärteil der effektiven Wirkung in der QED nie negativ wird.

$$Im\ \tilde{\Gamma}[A]_{QED} \geq 0 \tag{3.26}$$

Dies ist auch physikalisch unbedingt erforderlich, da sonst das Absolutsquadrat der Vakuum-Vakuum Amplitude (2.56) größer als eins sein könnte.

Schauen wir uns nun die Lage in der QCD an. Wegen des nichtlinearen Terms (3.15), kann die Größe $|\vec{E}^i(k)|^2 - |\vec{B}^i(k)|^2$ sowohl negativ als auch positiv für $k_o^2 \geq \vec{k}^2$ werden. Insbesondere wird der Imaginärteil der effektiven Wirkung für reine colourelektrische Felder negativ.

$$\mathrm{Im}\,\tilde{\Gamma}[A] < 0 \quad \text{für ein reines } \vec{E}^{\,i}\text{-Feld} \tag{3.27}$$

Wegen (2.56) ist dies im offenen Widerspruch zu der physikalischen Bedingung, daß das Absolutquadrat der Vakuum-Vakuum Amplitude immer kleiner oder gleich eins sein muß.

$$|\langle 0_+ | 0_- \rangle|^2 \leq 1 \tag{3.28}$$

Die Lösung dieses Widerspruchs ist sehr einfach. Man darf den Strom J, der gemäß (2.48) oder besser (2.49) das äußere Feld A erzeugt, nicht als einen klassischen Strom behandeln, der nicht auf das Quantensystem reagiert.

Wir wollen dies nun ausführlicher erklären. Um die Dinge so einfach wie möglich zu halten, wählen wir als Eichgruppe SU(2). Weiter nehmen wir $A^i_\mu = \delta^{i3} A_\mu$ für das Hintergrundfeld. Dies ergibt

$$G^i_{\mu\nu} = \delta^{i3} (\partial_\mu A^3_\nu - \partial_\nu A^3_\mu) \tag{3.29}$$

für den Feldstärketensor. In der Ein-Loop Approximation ist die Wechselwirkung zwischen dem Hintergrundfeld $A^i_\mu = \delta^{i3} A_\mu$ und dem Quantenfeld, das wir mit Q^i_μ (i=1,2,3) bezeichnen, durch die Vertizes charakterisiert, die in Fig. 1 skizziert sind.

Fig. 1

Hierbei haben wir $Q^{\pm}_{\mu} = (Q^{1}_{\mu} \pm i\, Q^{2}_{\mu})/\sqrt{2}$ benützt. (In der Ein - Loop-Approximation wechselwirkt Q^{3}_{μ} nicht mit dem Hintergrundsfeld $A^{i}_{\mu} = \delta^{i3} A_{\mu}$.) Gleichung (3.24) besagt deshalb, daß der Imaginärteil der Ein - Loop effektiven Wirkung für ein colour-elektrisches Feld

$$\vec{E}^{\ell}(k) = -i\,\delta^{\ell 3}\left(\vec{k}\,\phi^{3}(k) + k^{0}\vec{A}^{3}\right) \qquad , \; k_{0}^{2} > \vec{k}^{2} \tag{3.30}$$

wegen dem $Q^{+} - Q^{-}$ Loop negativ wird. Wegen (2.35a) ist dies äquivalent zu der Tatsache, das die Gesamtzahl der $Q^{+} - Q^{-}$ Gluonen-Paare,

$$N = \frac{1}{c}\int d^{4}x\; \dot{m}(\vec{x},t) \simeq \frac{2}{\hbar c}\,\mathrm{Im}\,\tilde{\Gamma}[A] \;, \tag{3.31}$$

die von dem Feld (3.30) produziert werden, negativ wird. Oder anders ausgedrückt, wenn wir gemäß (2.29) ein colour-elektrisches Feld (3.30) durch einen Strom J^{ext} erzeugen, dann sagen uns die Quantenkorrekturen, daß wir eine Vernichtung von $Q^{+} - Q^{-}$ Paare beobachten werden. Falls der Strom J^{ext} nun tatsächlich ein rein klassischer Strom wäre, dann wäre dies unmöglich, da man keine $Q^{+} - Q^{-}$ Paare vernichten kann, wo es noch keine $Q^{+} - Q^{-}$ Paare gibt. Aber wir dürfen nicht vergessen, daß die "infrared slavery" in der QCD verbietet einen klassischen Strom bei niedrigen Energien, $\mu \to 0$, zu definieren, wie dies in der QED üblich ist. Wenn wir in der QCD von einem "klassischen" Strom reden, so sollten wir immer die Skala angeben wo wir den Strom definiert haben. Wenn wir den Strom als eine Funktion der Skala messen, so werden wir einen kleineren Strom bei geringeren

Abständen

beobachten. Ein klassischer Strom J, der bei einer bestimmten Skala definiert ist, ist die Summe des nackten Stroms J^B, der sehr klein und wahrscheinlich null ist, und einer Wolke von Gluonen-Paaren, die den nackten Strom umgibt. Speziell ist der Strom (3.30) die Summe des nackten Stroms und einer Wolke von $Q^+ - Q^-$ Paaren. Somit besagt unsere Ein-Loop Rechnung einfach, daß einige dieser $Q^+ - Q^-$ Paare auf Grund der quantenmechanischen Fluktuationen vernichtet werden.

Wir wollen hier die Tatsache, daß wir Gluon-Paarvernichtung in der QCD und Elektron-Paarerzeugung in der QED beobachten, etwas genauer verstehen. Nehmen wir an, daß wir ein starkes elektrisches Feld in der QED erzeugt haben. Dann wissen wir, daß die potentielle Energie des Systems abnimmt, wenn wir zu kleineren Feldstärken gehen. Da in der Natur immmer eine Tendenz vorhanden ist, die potentielle Energie zu vermindern, wird das System nach einem Weg schauen, auf dem es zu geringeren Feldstärken gelangt. Dies wird durch Elektron-Positron-Paarerzeugung erreicht, da die so produzierten Paare das angelegte elektrische Feld abschirmen, so daß es schwächer wird. Deshalb muß die Paarproduktionsrate in der QED positiv sein.

Nehmen wir nun andererseits an, daß wir ein starkes colour-elektrisches Feld in der QCD erzeugt haben. Dann wissen wir wieder, daß die potentielle Energie abnimmt, wenn wir zu kleineren Feldstärken gehen. Aber in der QCD können wir

kleinere Feldstärken nicht durch Gluon Paarproduktion erreichen, da jedes neue Gluon-Paar das Feld, auf Grund des "anti-screening" Effekts dieser Teilchen, noch verstärken würde. Um das Feld zu schwächen, muß man die Gluonen vernichten, die für das starke Feld verantwortlich sind. Deshalb muß die Paarproduktionsrate in der QCD für colour-elektrische Felder negativ sein.

Diese Betrachtungen zeigen uns, wie wir den Widerspruch von unseren Resultaten zu (3.28) lösen können. Wenn wir das System in Anwesenheit des colour-elektrischen Feldes (3.30), das von einem Colour Strom J^{ext} produziert werden soll, betrachten wollen, so müssen wir zuerst diesen Strom J^{ext} erzeugen. Wie wir gesehen haben, ist dieser Strom die Summe des nackten Stroms $J_B{}^{ext}$ und einer Wolke von $Q^+ - Q^-$ Paaren. Wenn wir somit den Strom J^{ext} erzeugen wollen, so genügt es nicht nur den nackten Strom $J_B{}^{ext}$ zu erzeugen, sondern wir müssen auch eine große Anzahl von $Q^+ - Q^-$ Paaren erzeugen. Wir wollen die Anzahl dieser Paare mit N_J bezeichnen. Eine kleine Anzahl, ΔN, dieser Paare werden nun aufgrund der quantenmechanischen Fluktuationen gemäß unserer Ein-Loop Rechnung vernichtet. Die Gesamtzahl der produzierten $Q^+ - Q^-$ Paare ist somit durch $N^t = N_J - \Delta N$ gegeben. Wegen (3.31) wird deshalb der totale Imagimärteil der effektiven Wirkung positiv :

$$Im\ \tilde{\Gamma}[A] \simeq \tfrac{1}{2}\hbar c\, N^t = \tfrac{1}{2}\hbar c (N_J - \Delta N) \geq 0 . \qquad (3.32)$$

Der Imaginärteil von (3.24) ist nur ein kleiner Beitrag zum gesamten Prozess, er beschreibt die quantenmechanischen Korrekturen. Wenn wir den gesamten Imaginärteil der effektiven Wirkung berechnen wollen, so müssen wir auch die Beiträge in Betracht ziehen, die von der Erzeugung des Stroms J^{ext} herrühren. Somit haben wir also eine befriedigende Erklärung dafür gefunden, daß der Ein-Loop Beitrag (3.24) zum Imaginärteil der effektiven Wirkung für colour-elektrische Felder negativ wird.

4. Der Propagator eines masselosen geladenen Spin-1 Teilchens im homogenen elektromagnetischen Feld

In den folgenden Kapiteln wollen wir die effektive Wirkung in kovariant-konstanten Colour-Feldern studieren. Dazu ist es notwendig, den Gluonpropagator in kovariant-konstanten Feldern zu kennen. Um Komplikationen aufgrund des Colour Freiheitsgrades zu vermeiden, wollen wir hier in diesem Kapitel den Propagator eines geladenen masselosen Spin-1 Teilchens mit gyromagnetischem Moment $g_J = 2$ in einem homogenen elektromagnetischen Feld als Modellfall für den Gluonpropagator im kovariant-konstanten Colour-Feld betrachten. Der Einfachheit halber wollen wir den Propagator nur in der Feynman-Eichung betrachten. Ferner werden wir hier in diesem Kapitel 4 ausnahmsweise die (-,+,+,+) Metrik benützen.

Gewöhnlicherweise wird der Propagator in einem konstanten elektromagnetischen Feld mit Hilfe eines Eigenzeitintegrals berechnet. Es stellt sich nun heraus, daß solch eine Eigenzeitdarstellung nicht eindeutig ist, solange man nicht den genauen Weg in der komplexen Eigenzeitebene festgelegt hat, weil es in der komplexen Eigenzeitebene Pole gibt, die man auf verschiedene Weise umgehen kann. Wir werden hier die Wege so wählen, daß die Greensche Funktion dem Euklidischen Postulat genügt. Deshalb werden wir nicht nur die kausale Greensche Funktion betrachten, sondern die Greensche Funktion als eine Funktion einer Variablen φ, die die analytische Fortsetzung

von der Euklidischen Greenschen Funktion zum Propagator im Minkowski Raum parameterisiert, studieren .

Wir betrachten deshalb $\Delta^{\mu}{}_{\nu}(x,x';\varphi)$, das durch

$$\left\{ -\left(g^{\sigma\delta}(\varphi)\, D_\sigma D_\delta\right)\delta^{\lambda}_{\mu} + 2ieg^{\lambda\sigma}(\varphi)\, F_{\sigma\mu} \right\} \Delta^{\mu}{}_{\nu}(x,x';\varphi) = \delta^{\lambda}_{\nu}\,\delta(x-x') \qquad (4.1)$$

definiert ist. Hierbei haben wir die Metrik

$$g_{\mu\nu}(\varphi) = (e^{2i\varphi},+1,+1,+1) = \left(g^{\mu\nu}(\varphi)\right)^{*} \qquad (4.2)$$

benützt.

$$D_\mu = \partial/\partial x^\mu - ie\,A_\mu \qquad (4.3)$$

ist die kovariante Ableitung, und

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -F_{\nu\mu} = const. \qquad (4.4)$$

ist der Feldstärketensor.

Aufgrund des Euklidischen Postulates sollte $\Delta^{\mu}{}_{\nu}(x,x';\varphi)$ eine stetige Funktion in φ, für $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, sein. Für $\varphi = 0$ erhalten wir die Euklidische Greensche Funktion eines masselosen geladenen Spin-1 Teilchens (mit gyromagnetischem Moment $g_J = 2$) in einem homogenen Euklidischen elektromagnetischen Feld $F_E{}^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu\sigma} F_{\sigma\nu}$. Für $\varphi = \pi/2$ und $\varphi = -\pi/2$ erhalten wir die entsprechenden kausalen bzw. antikausalen Propagatoren in einem homogenen elektromagnetischen Feld $F^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu\sigma} F_{\sigma\nu}$.

Um die Greensche Funktion zu berechnen, müssen wir die Matrix

$$F^{\mu}{}_{\nu}(\varphi) = g^{\mu\sigma}(\varphi)\, F_{\sigma\nu} \qquad (4.5)$$

studieren.

Wenn wir $(F_{10}, F_{20}, F_{30}) = \vec{E}$, $(F_{23}, F_{31}, F_{12}) = \vec{B}$ und $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ benützen, so finden wir für die vier Eigenwerte der Matrix $F^{\mu}{}_{\nu}(\varphi)$

$$F_1'(\varphi) = -i f^{(2)}(\varphi) \exp\left\{-i\phi^{(2)}(\varphi)\right\}, \quad F_2'(\varphi) = -F_1'(\varphi),$$
$$F_3'(\varphi) = -i f^{(1)}(\varphi) \exp\left\{-i\phi^{(1)}(\varphi)\right\}, \quad F_4'(\varphi) = -F_3'(\varphi). \tag{4.6}$$

Hierbei sind $f^{(1)}(\varphi)$, $f^{(2)}(\varphi)$ reelle nichtnegative stetige Funktionen in φ, die folgende Bedingungen erfüllen.

$$f^{(1)}(\varphi) > 0, \quad f^{(2)}(\varphi) > 0 \quad \text{für} \quad \vec{E}\cdot\vec{B} \neq 0; \tag{4.6a}$$

$$f^{(1)}\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = f^{(1)}\left(-\tfrac{\pi}{2}\right) = f^{(1)} \equiv \sqrt{\sqrt{\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2} + \mathcal{F}} \geq 0, \tag{4.6b}$$

$$f^{(2)}\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = f^{(2)}\left(-\tfrac{\pi}{2}\right) = f^{(2)} \equiv \sqrt{\sqrt{\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2} - \mathcal{F}} \geq 0 \tag{4.6c}$$

mit

$$\mathcal{F} = (\vec{B}^2 - \vec{E}^2)/2, \quad \mathcal{G}^2 = (\vec{E}\cdot\vec{B})^2; \tag{4.6d}$$

$$f^{(1)}(0) = f_E^{I}, \quad f^{(2)}(0) = f_E^{II} \quad \text{für} \quad \mathcal{F} > 0, \tag{4.6e}$$
$$f^{(1)}(0) = f_E^{II}, \quad f^{(2)}(0) = f_E^{I} \quad \text{für} \quad \mathcal{F} < 0 \tag{4.6f}$$

wobei

$$f_E^{I} = \sqrt{\mathcal{F}_E + \sqrt{\mathcal{F}_E^2 - \mathcal{G}^2}}, \tag{4.6g}$$

$$f_E^{II} = \sqrt{\mathcal{F}_E - \sqrt{\mathcal{F}_E^2 - \mathcal{G}^2}} \tag{4.6h}$$

mit

$$\mathcal{F}_E = \tfrac{1}{2}(\vec{B}^2 + \vec{E}^2). \tag{4.6d'}$$

Weiterhin sind $\phi^{(1)}(\varphi)$, $\phi^{(2)}(\varphi)$ reelle stetige Funktionen in φ. Sie genügen den folgenden Bedingungen.

$$0 \leq \phi^{(i)}(\varphi) \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{für} \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \qquad (i=1,2)\,, \qquad (4.6i)$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \phi^{(i)}(\varphi) \leq 0 \quad \text{für} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0 \qquad (i=1,2)\,, \qquad (4.6j)$$

$$\phi^{(1)}(0) = \phi^{(1)}(-\tfrac{\pi}{2}) = \phi^{(1)}(+\tfrac{\pi}{2}) = 0\,, \qquad (4.6k)$$

$$\phi^{(2)}(0) = 0\,,\ \phi^{(2)}(-\tfrac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}\,,\ \phi^{(2)}(+\tfrac{\pi}{2}) = +\frac{\pi}{2}\,. \qquad (4.6l)$$

Deshalb hat die Greensche Funktion $\Delta^{\mu}_{\nu}(x,x';\varphi)$ – eine 4x4 Matrix in bezug auf die Lorentzindizes – die vier Eigenwerte $\Delta^{(\varkappa)}(x,x';\varphi)$ $(\varkappa = 1,2,3,4)$, die der folgenden Gleichung genügen.

$$\left\{-\left(g^{\varepsilon\delta}(\varphi)\,D_\varepsilon D_\delta\right) + 2ie\,F'_\varkappa(\varphi)\right\}\Delta^{(\varkappa)}(x,x';\varphi) = \delta(x-x') \qquad (\varkappa = 1,2,3,4) \qquad (4.7)$$

Diese Gleichung lösen wir nun durch den Eigenzeitintegral-Ansatz [23]

$$\Delta^{(\varkappa)}(x,x';\varphi) = e^{i\varphi}\int_{C(\varphi)} ds\ \Delta^{(\varkappa)}(s;x-x';\varphi) \qquad (4.8)$$

mit *)

$$\Delta^{(\varkappa)}(s;x-x';\varphi) = \frac{1}{(4\pi)^2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\,tr\,\ln\frac{\sin(eF(\varphi)s)}{eF(\varphi)}\right\}e^{-2ieF'_\varkappa(\varphi)s}$$
$$\exp\left\{-\frac{1}{4}(x-x')eF(\varphi)\cot(eF(\varphi)s)(x-x')\right\}. \qquad (4.9)$$

---

*) Wir wählen hier $A^{\mu}(x) = -\frac{1}{2}F^{\mu\nu}(x-x')_\nu$.

Hierbei ist $F(\varphi)$ die in (4.5) definierte Matrix. $C^{*}(\varphi)$ ist ein geeigneter Integrationsweg in der komplexen s-Ebene, der bei $s = 0$ beginnt und dann ins Unendliche geht.
Durch direktes Nachrechnen kann man leicht zeigen, daß (4.8) mit (4.9) für jeden Weg $C^{*}(\varphi)$, für den das Integral (4.8) konvergent ist, eine Lösung von (4.7) ist:

$$\left\{ -g^{\alpha\delta}(\varphi) D_\alpha D_\delta + 2ie F_\varkappa^{\,l}(\varphi) \right\} \Delta^{(\varkappa)}(x, x'; \varphi)$$

$$= e^{i\varphi} \int_{C^{*}(\varphi)} ds \left\{ \frac{1}{2} tr \left(eF(\varphi) \cot(eF(\varphi)s) \right) - \frac{i}{4}(x-x') \left(\frac{eF(\varphi)}{\cot(eF(\varphi)s)} \right)^{2} (x-x') \right\} \Delta^{(\varkappa)}(s; x-x'; \varphi)$$

$$= -e^{i\varphi} \int_{C^{*}(\varphi)} ds \frac{d}{ds} \Delta^{(\varkappa)}(s; x-x'; \varphi)$$

$$= -e^{i\varphi} \lim_{\substack{s \to \infty \\ s \in C^{*}(\varphi)}} \Delta^{(\varkappa)}(s; x-x'; \varphi) + e^{i\varphi} \lim_{\substack{s \to 0 \\ s \in C^{*}(\varphi)}} \Delta^{(\varkappa)}(s; x-x'; \varphi)$$

$$= -e^{i\varphi} \lim_{\substack{s \to \infty \\ s \in C^{*}(\varphi)}} \Delta^{(\varkappa)}(s; x-x'; \varphi) + e^{i\varphi} \lim_{\substack{s \to 0 \\ s \in C^{*}(\varphi)}} \left\{ \frac{1}{(4\pi s)^2} e^{-\frac{i}{4s}(x-x')^2} \right\}$$

$$= -e^{i\varphi} \lim_{\substack{s \to \infty \\ s \in C^{*}(\varphi)}} \Delta^{(\varkappa)}(s; x-x'; \varphi) + \left\{ \lim_{\substack{s \to 0 \\ s \in C^{*}(\varphi)}} \left\{ (4\pi s e^{-2i\varphi})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x^0-x^{0\prime})^2}{4se^{-2i\varphi}}} \right\} \right\} \cdot \prod_{i=1,2,3} \left\{ \lim_{\substack{s \to 0 \\ s \in C^{*}(\varphi)}} \left\{ (4\pi s)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x^i-x^{i\prime})^2}{4s}} \right\} \right\}$$

$$\stackrel{?}{=} 0 + \delta(x^0 - x^{0\prime}) \prod_{i=1,2,3} \delta(x^i - x^{i\prime}) = \delta(x - x') \qquad (4.10)$$

Hierbei gilt das mit einem Fragezeichen versehene Gleichheits-

zeichen genau dann, wenn das Integral in (4.8) konvergent ist. Wir wollen nun diejenigen Wege $C^{\varkappa}(\varphi)$ bestimmen, die mit dem Euklidischen Postulat verträglich sind. Wir müssen deshalb diejenigen Abbildungen $C^{\varkappa} : \varphi \longrightarrow C^{\varkappa}(\varphi)$ von dem Intervall $-\pi/2 \leq \varphi \leq +\pi/2$ in die Menge der Wege in der komplexen s-Ebene, die bei $s = 0$ beginnen und dann ins Unendliche gehen, bestimmen, für die das Integral (4.8) eine stetige Funktion in φ für $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ ist. Dies wird für solche Abbildungen $C^{\varkappa}$ der Fall sein, die die folgenden drei Bedingungen erfüllen.

(i) Das Integral (4.8) ist für alle $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ konvergent.

(ii) $C^{\varkappa}(\varphi)$ ist eine stetige Funktion in φ, d.h., wenn man von $\varphi = -\pi/2$ nach $\varphi = +\pi/2$ rotiert, dann wird der Weg $C^{\varkappa}(\varphi)$ stetig von $C^{\varkappa}(-\pi/2)$ zu $C^{\varkappa}(+\pi/2)$ deformiert.

(iii) Der Weg $C^{\varkappa}(\varphi)$ "hüpft" nicht über Pole des Integranden (2.9), wenn man von $\varphi = -\pi/2$ nach $\varphi = +\pi/2$ rotiert.

Eine Abbildung $C^{\varkappa}$, die diese drei Bedingungen erfüllt, werden wir eine verträgliche Abbildung nennen.

Wir werden zwei Abbildungen $C^{\varkappa}$ und $\tilde{C}^{\varkappa}$ äquivalent nennen, wenn das Integral (4.8) für die Wege $C^{\varkappa}(\varphi)$ und $\tilde{C}^{\varkappa}(\varphi)$ für alle $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ den gleichen Wert ergibt.

In den folgenden Überlegungen wollen wir den Ausnahmefall $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ ausschließen; folglich werden, wegen (4.6) und (4.6a), alle vier Eigenwerte $F^{!}_{\varkappa}(\varphi)$ der Matrix $F(\varphi)$ ungleich null sein.

Wir beginnen nun unsere Analyse indem wir die Euklidische Greensche Funktion ($\varphi = 0$) betrachten. Für $\varphi = 0$ hat der Integrand

(2.9) entlang der imaginären s-Achse Pole und ist für alle s mit $\mathcal{R}e\ s \neq 0$ regulär analytisch. Wir können deshalb zwischen zwei verschiedenen Klassen von verträglichen Abbildungen unterscheiden. Die erste Klasse besteht aus allen verträglichen Abbildungen $C^{\varkappa}$, für die $C^{\varkappa}(0) := C^{\varkappa}(\varphi)\big|_{\varphi=0}$ im ersten oder vierten Quadrant gegen unendlich geht; wir werden sie $C_r^{\varkappa}$ nennen. Die zweite Klasse besteht aus aus allen verträglichen Abbildungen $C^{\varkappa}$, für die $C^{\varkappa}(0)$ im zweiten oder vierten Quadranten gegen unendlich geht; wir werden diese mit $C_\ell^{\varkappa}$ bezeichnen. Wenn wir nun die Rotation von der Euklidischen Greenschen Funktion ($\varphi=0$) zur kausalen Greenschen Funktion ($\varphi=\pi/2$) durchführen, dann werden die Pole bei $s = \pi\nu\,(e F_1'(\varphi))^{-1} = -\pi\nu\,(e F_2'(\varphi))^{-1}$ mit $\nu \in \mathbb{Z}$, von der imaginären s-Achse durch die zweiten und vierten Quadranten zur reellen s-Achse wandern. (Vgl. (4.6) und (4.6i,l).) Wohingegen die Pole bei $s = \pi\nu\,(e F_3'(\varphi))^{-1}$ $= -\pi\nu\,(e F_4'(\varphi))^{-1}$ zwar möglicherweise in den zweiten und den vierten Quadranten eindringen können, aber für $\varphi=\pi/2$ dann doch wieder zur imaginären s-Achse zurückkehren werden. (Vgl. (4.6) und (4.6i,k).) Wegen Bedingung (iii) muß deshalb für jede verträgliche Abbildung $C_r^{\varkappa}$ der Weg $C_r(\pi/2)$ in dem ersten Quadranten gegen unendlich gehen; und für jede verträgliche Abbildung $C_\ell^{\varkappa}$ muß der Weg $C_\ell^{\varkappa}(\pi/2)$ im dritten Quadranten gegen unendlich gehen. Auf ähnliche Weise kann man die Rotation von der Euklidischen Funktion ($\varphi=0$) zur antikausalen Greenschen Funktion ($\varphi=-\pi/2$) untersuchen. Es stellt sich dann heraus, daß für jede verträgliche Abbildung $C_r^{\varkappa}$

(bzw. C_ℓ^*) die Wege $C_r^*(-\pi/2)$ (bzw. $C_\ell^*(-\pi/2)$) im vierten (bzw. zweiten) Quadranten gegen unendlich gehen müssen. Insgesamt haben wir somit gefunden : wenn wir von $\varphi=+\pi/2$ über $\varphi=0$ nach $\varphi=-\pi/2$ rotieren, dann wird für jede verträgliche Abbildung C_r^* der Weg $C_r^*(\varphi)$ von einem Weg, der im ersten Quadranten gegen unendlich geht, zu einem Weg, der im vierten Quadranten gegen unendlich geht, deformiert; und für jede verträgliche Abbildung C_ℓ^* wird der Weg $C_\ell^*(\varphi)$ von einem Weg, der im dritten Quadranten gegen unendlich geht, zu einem Weg, der im zweiten Quadranten gegen unendlich geht, deformiert. Aus Symmetriegründen wird deshalb jede verträgliche Abbildung C_r^* (bzw. C_ℓ^*) einer verträglichen Abbildung $\tilde{C}_r^*$ (bzw. $\tilde{C}_\ell^*$), mit der Eigenschaft, daß $\tilde{C}_r^*(0)$ (bzw. $\tilde{C}_\ell^*(0)$) entlang der positiven (bzw. negativen) reellen s-Achse gegen unendlich geht, äquivalent sein. (Diese Tatsache kann auch streng bewiesen werden, ohne daß man das Argument der Symmetrie heranzieht. Dies würde jedoch eine sehr sorgfältige Analyse der Eigenwerte in (4.6) erfordern, was wir hier nicht tun wollen.) Deshalb können wir nun ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß der Weg $C_r^*(0)$ entlang der positiven reellen s-Achse gegen unendlich geht, und daß der Weg $C_\ell^*(0)$ entlang der negativen reellen Achse gegen unendlich geht, wenn C_r^* bzw. C_ℓ^* verträgliche Abbildungen sind. Oder umgekehrt, falls das Integral (4.8) für einen Weg, der entlang der positiven s-Achse gegen unendlich geht, für $\varphi=0$ divergent ist, dann kann überhaupt kein C_r^* eine ver-

trägliche Abbildung sein. Ebenso können wir schließen, falls das Integral (4.8) für einen Weg, der entlang der negativen s-Achse gegen unendlich geht, für $\varphi = 0$ divergent ist, dann kann überhaupt kein $C_\ell^\varkappa$ eine verträgliche Abbildung sein. Dies gibt uns eine Auswahlregel für die verträglichen Abbildungen. Benützen wir (4.6), (4.6e-h), (4.6k,l) für die Eigenwerte der Matrix $F(\varphi)$ für $\varphi = 0$, und untersuchen wir die Konvergenz des Integrals (4.8) mit dem Integranden (4.9) für $s \to \infty$ für $\varphi = 0$, so finden wir folgende Bedingungen für die Abbildungen $C^\varkappa$.

$$C^1 = C_r^1 \quad \text{für} \quad \mathcal{F} < 0 \,, \tag{4.11a}$$

$$C^2 = C_\ell^2 \quad \text{für} \quad \mathcal{F} < 0 \,, \tag{4.11b}$$

$$C^3 = C_r^3 \quad \text{für} \quad \mathcal{F} > 0 \,, \tag{4.11c}$$

$$C^4 = C_\ell^4 \quad \text{für} \quad \mathcal{F} > 0 \,. \tag{4.11d}$$

Die Gleichungen (4.11a-d) implizieren folgende Wege für die kausale Greensche Funktion ($\varphi = \frac{\pi}{2}$). Für $\varkappa = 1$ und $\mathcal{F} < 0$ oder $\varkappa = 3$ und $\mathcal{F} > 0$ müssen die Wege $C^\varkappa(\pi/2) = C_r^\varkappa(\pi/2)$ im ersten Quadranten gegen unendlich gehen. Eine genauere Analyse zeigt uns, daß das Integral (4.8) für $\varphi = \pi/2$ und $\varkappa = 1,3$ für jeden Weg der im ersten Quadranten gegen unendlich geht für $s \to \infty$ konvergiert und unabhängig vom speziellen Verhalten des Integrationsweges für $s \to \infty$ ist. Für $\varkappa = 2$ und $\mathcal{F} < 0$ oder $\varkappa = 4$ und $\mathcal{F} > 0$ müssen die Wege $C^\varkappa(\pi/2) = C_\ell^\varkappa(\pi/2)$ im dritten Quadranten gegen unendlich gehen. Für $\varphi = \pi/2$ und $\varkappa = 2,4$ ist das

Integral (4.8) für jeden Weg, der im dritten Quadranten gegen unendlich geht, für $s \to \infty$ konvergent und unabhängig vom speziellen Verhalten des Integrationsweges für $s \to \infty$.
Nun wollen wir den Fall $\mathcal{F} < 0$ noch genauer betrachten. Wie wir soeben erläutert haben, haben wir für $\varkappa = 1,2$ eine (bis auf Äquivalenz) eindeutige Vorschrift für den Integrationsweg für $s \to \infty$ der kausalen Greenschen Funktion gefunden. Für $\varkappa = 1$ hat der Integrationsweg im ersten Quadranten gegen unendlich zu gehen, und für $\varkappa = 2$ muß er im dritten Quadranten gegen unendlich gehen. Es stellt sich nun die Frage nach dem Verhalten der Integrationswege der kausalen Greenschen Funktion für $s \to \infty$ für $\varkappa = 3, 4$. Wie aus den vorausgehenden Untersuchungen ersichtlich ist, können die Integrationswege der kausalen Greenschen Funktion nur im ersten oder dritten Quadranten gegen unendlich gehen. Wenn wir nun schon einmal gefunden haben, daß für $\mathcal{F} < 0$ mindestens ein Weg – nämlich der für $\varkappa = 1$ – im ersten Quadranten und mindestens ein Weg – nämlich der für $\varkappa = 2$ – im dritten Quadranten gegen unendlich gehen muß, so ist es, wegen Symmetriegründen sinnvoll, anzunehmen, daß die Anzahl der Integrationswege, die im ersten Quadranten gegen unendlich gehen, gleich der Anzahl der Integrationswege, die im dritten Quadranten gegen unendlich gehen, ist. Es ergeben sich somit die folgenden zwei verschiedenen Möglichkeiten.

(i) Für $\varkappa = 3$ geht der Weg im ersten Quadranten und für $\varkappa = 4$ geht der Weg im dritten Quadranten gegen unendlich.

(ii) Für $\varkappa = 3$ geht der Weg im dritten Quadranten und für $\varkappa = 4$ geht der Weg im ersten Quadranten gegen unendlich.

Nun muß noch entschieden werden, welche der beiden Möglichkeiten, die richtige ist. Wählen wir den Fall (i), so zeigt sich, daß das Integral (4.8) (für $\varphi = \frac{\pi}{2}$) für jeden Weg, der in den angegebenen Quadranten gegen unendlich geht, für $s \to \infty$ konvergiert und unabhängig vom speziellen Verhalten der Wege für $s \to \infty$ ist. Wählen wir hingegen den Fall (ii), so finden wir, daß sowohl für $\varkappa = 3$ als auch $\varkappa = 4$ das Integral (4.8) (für $\varphi = \pi/2$) nur für spezielle Weg für $s \to \infty$ konvergent ist. (Insbesondere ist es für den Fall (ii) nicht möglich, beide Wege entlang der imaginären Achse zu wählen.) Aus diesen Gründen entscheiden wir uns für den Fall (i).

Also

$$\begin{aligned} C^1 &= C^1_r \\ C^2 &= C^2_\ell \\ C^3 &= C^3_r \\ C^4 &= C^4_\ell \end{aligned} \qquad \text{für} \quad \mathcal{F} < 0 \qquad (4.12)$$

Ganz analog können wir nun den Fall $\mathcal{F} > 0$ behandeln und finden dann

$$\begin{aligned} C^1 &= C^1_r \,, \quad C^2 = C^2_\ell \\ C^3 &= C^3_r \,, \quad C^4 = C^4_\ell \end{aligned} \qquad \text{für} \quad \mathcal{F} > 0 \qquad (4.13)$$

Die Gleichungen (4.11a) und (4.11b) sollen also nicht nur für $\mathcal{F} < 0$ sondern auch für $\mathcal{F} > 0$ gelten. Ebenso sollen die Gleichungen (4.11c) und (4.11d) also nicht nur für $\mathcal{F} > 0$ sondern auch für $\mathcal{F} < 0$ gültig sein.

Mit Argumenten, die den Argumenten, die wir bei der Herleitung von (4.12) und (4.13) benützt haben, ähnlich sind, finden wir schließlich auch noch

$$C^1 = C^1_r \,,\; C^2 = C^2_\ell \qquad C^3 = C^3_r \,,\; C^4 = C^4_\ell \qquad \text{für} \quad \mathcal{F} = 0 \tag{4.14}$$

Zusammengefaßt, haben wir also

$$C^1 = C^1_r \tag{4.15a}$$
$$C^2 = C^2_\ell \tag{4.15b}$$
$$C^3 = C^3_r \tag{4.15c}$$
$$C^4 = C^4_\ell \tag{4.15d}$$

für alle $\mathcal{F} \in \mathbb{R}$

gefunden. Für $\varkappa = 1,3$ gehen also die Integrationswege der kausalen Greenschen Funktion im ersten Quadranten gegen unendlich; und für $\varkappa = 2,4$ gehen sie im dritten Quadranten gegen unendlich.

Bisher haben wir in allen unseren Überlegungen immer den Spezialfall $\vec{E}\cdot\vec{B} = 0$ ausgeschlossen. Aus physikalischen Gründen sollte jedoch dieser Spezialfall stetig aus dem allgemeinen Fall $\vec{E}\cdot\vec{B} \neq 0$ hervorgehen. Deshalb muß (4.11a-d) bzw. (4.15a-d) auch für $\vec{E}\cdot\vec{B} = 0$ gültig sein. (Genauer gesagt, muß für $\vec{E}\cdot\vec{B} = 0$

jede verträgliche Abbildung $C^{\varkappa}$ einer Abbildung äquivalent sein, die (4.11a-d) bzw. (4.15a-d) erfüllt.)
In Fig. 2 haben wir unser bisheriges Ergebnis graphisch dargestellt.

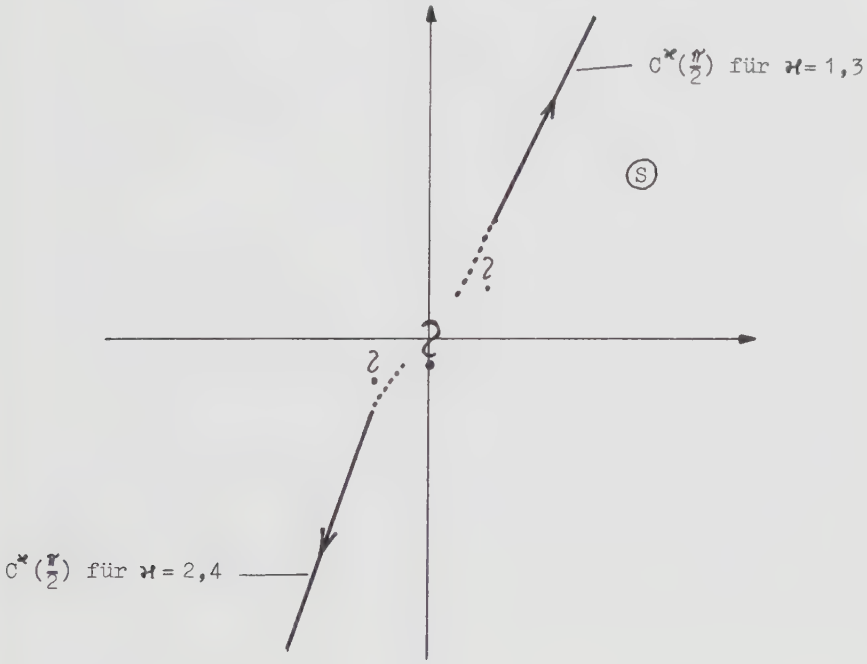

Fig. 2 : Die Integrationswege der kausalen Greenschen Funktion für $s \to \infty$.

Da die Verallgemeinerung von (4.11a-d) zu (4.15a-d) vielleicht nicht ganz so zwingend erscheinen mag, möchten wir hier noch erwähnen, daß für den Fall eines reinen Magnetfeldes oder eines reinen elektrischen Feldes nur (4.11a-d) und nicht auch noch

(4.15a-d) zur Anwendung kommen werden. Betrachten wir nämlich den Fall eines reinen Magnetfeldes, dann gilt immer $\mathcal{F} > 0$ und die Gleichungen (4.11a-d) geben deshalb den Verlauf des Integrationsweges für $s \to \infty$ für die Fälle $\varkappa = 3,4$ an. Beachten wir nun, daß $\varkappa = 3,4$ den physikalischen Moden mit Spin parallel und antiparallel zum Magnetfeld entspricht, wohingegen $\varkappa = 1,2$ unphysikalischen Moden entspricht, die durch Geist-Terme aufgehoben werden, so sehen wir, daß der Verlauf der Integrationswege für $\varkappa = 1,2$ physikalisch bedeutungslos ist. Somit reicht (4.11a-d) zur Charakterisierung der Integrationswege für $s \to \infty$ aus. (4.15a-d) wird gar nicht benötigt. Für den Fall eines reinen elektrischen Feldes gilt hingegen immer $\mathcal{F} < 0$, und die Gleichungen (4.11a-d) geben somit den Verlauf des Integrationsweges für $s \to \infty$ für die Fälle $\varkappa = 1,2$ an. Dieses Mal entsprechen $\varkappa = 3,4$ den unphysikalischen Moden, die durch die Geist-Terme kompensiert werden. Deshalb ist auch für ein rein elektrisches Feld (4.11a-d) ausreichend.

Nachdem wir nun das Verhalten der Integrationswege für $s \to \infty$ festgelegt haben, wollen wir untersuchen wie die Wege für $s \to 0$ gewählt werden müssen. Hierzu beachten wir, daß

$$\Delta^{(\varkappa)}(s; x-x'; \varphi) \underset{s\to 0}{\sim} (4\pi s)^{-2} \exp\left\{-\frac{1}{4s}(x-x')^2\right\} \qquad (4.16)$$

für den Integranden in (4.8) gilt. Die rechte Seite von (4.16) stimmt mit dem Integranden von (4.8) überein, wenn die äußeren Felder abgeschaltet sind. Dies ist in Übereinstimmung mit der

Tatsache, das die Beiträge von $s \to 0$ zum Eigenzeitintegral das Hochenergieverhalten der Greenschen Funktion bestimmen. Da das Hochenergieverhalten der Greenschen Funktion nicht durch äußere Felder beeinflußt werden darf, sollten deshalb die Wege $C^{x}(\varphi)$ für $s \to 0$ mit denjenigen übereinstimmen, die man für die Greensche Funktion für den feldfreien Fall nimmt. Deshalb sollte der Integrationsweg für den kausalen Propagator ($\varphi = \pi/2$) für kleine s bei $s = 0$ beginnen und dann ein kleines Stückchen entlang der positiven imaginären s-Achse verlaufen. Entsprechend sollte der Integrationsweg für die Euklidische Greensche Funktion ($\varphi = 0$) bei $s = 0$ beginnen und dann ein kleines Stückchen entlang der positiven reellen s-Achse verlaufen. Allgemein sollte der Weg $C^{x}(\varphi)$ für $-\pi/2 \leq \varphi \leq +\pi/2$ bei $s = 0$ mit einem Startwinkel $\tilde{\varphi}^{x} = \varphi$ beginnen. Hierbei ist der Startwinkel $\tilde{\varphi}^{x}$ wie folgt definiert. Sei $s = s(t)$ mit $0 \leq t < \infty$, $s(0) = 0$, $s(\infty) = \infty$ eine Parameterisierung des Weges $C^{x}(\varphi)$, dann ist $\tilde{\varphi}^{x}$ durch

$$\tilde{\varphi}^{x} = \lim_{t \to 0} \arg \frac{ds(t)}{dt} \tag{4.17}$$

definiert.

Die graphische Darstellung unserer Resultate für die Integrationswege bei kleinen s findet sich in Fig. 3.

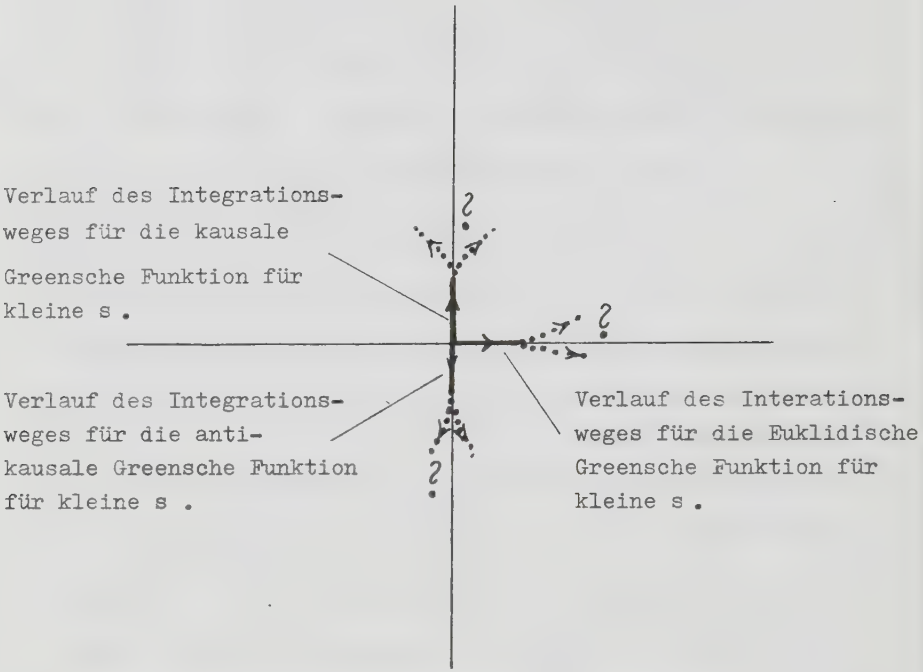

Fig. 3 Verlauf der Integrationswege für kleine s .

Kombinieren wir nun die Resultate , die wir für das Verhalten der Integrationswege für $s \to \infty$ und für $s \to 0$ gefunden haben , so ergeben sich,mit einigen weiteren Argumenten , folgende Integrationswege für die Greenschen Funktionen .
Für die kausale Greensche Funktion gilt für die Integrations-wege :

$$C^{\varkappa}(\pi/2) \equiv C^{\varkappa+} = \Gamma_r^+ \quad \text{für} \quad \varkappa = 1,3$$

$$C^{\varkappa}(\pi/2) \equiv C^{\varkappa+} = \frac{1+\lambda}{2}\Gamma_{\ell,I}^+ + \frac{1-\lambda}{2}\Gamma_{\ell,II}^+ \quad \text{für} \quad \varkappa = 2,4 \qquad (4.18)$$

Hierbei ist λ eine reelle Zahl und die Wege Γ_r^+, $\Gamma_{\ell,I}^+$ und $\Gamma_{\ell,II}^+$ sind in Fig. 4 skizziert.

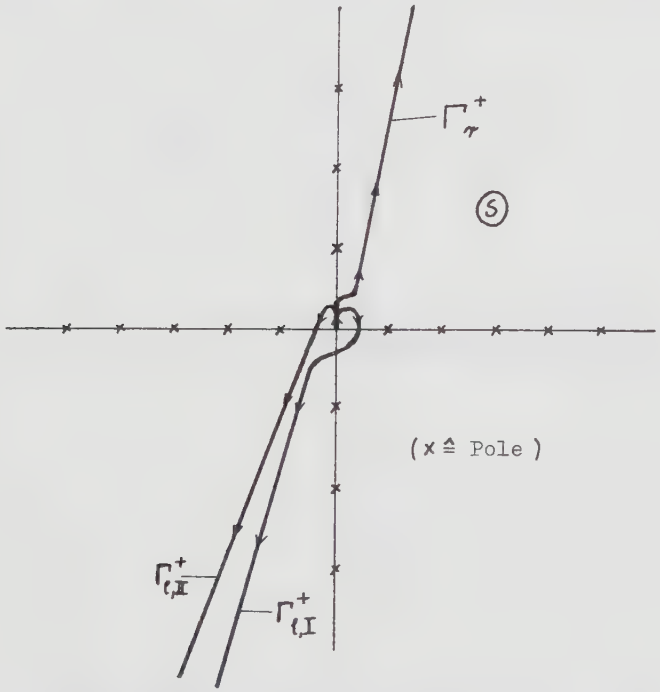

Fig. 4 Die Integrationswege der kausalen Greenschen Funktion. Der Weg Γ_r^+ kann in beliebiger Weise im ersten Quadranten gegen unendlich gehen. Die Wege $\Gamma_{\ell,I}^+$ und $\Gamma_{\ell,II}^+$ können in beliebiger Weise im dritten Quadranten gegen unendlich gehen.

Die Integrationswege der Euklidischen Greenschen Funktion sind

$$C^{\varkappa}(0) \equiv C^{\varkappa E} = \Gamma_{\tau}^{E} \quad \text{für} \quad \varkappa = 1,3$$

$$C^{\varkappa}(0) \equiv C^{\varkappa E} = \frac{1+\lambda}{2}\Gamma_{\ell,I}^{E} + \frac{1-\lambda}{2}\Gamma_{\ell,II}^{E} \quad \text{für} \quad \varkappa = 2,4$$

(4.19)

Die Integrationswege Γ_{τ}^{E} , $\Gamma_{\ell,I}^{E}$ und $\Gamma_{\ell,II}^{E}$ sind in Fig.5 skizziert .

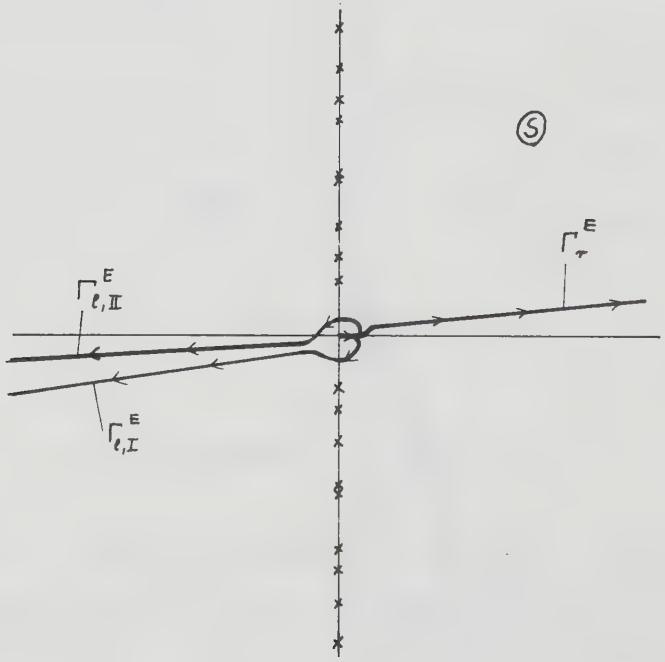

Fig. 5 Die Integrationswege der Euklidischen Greenschen Funktion . Der Weg Γ_{τ}^{E} kann in beliebiger Weise im ersten oder vierten Quadranten gegen unendlich gehen . Die Wege $\Gamma_{\ell,I}^{E}$ und $\Gamma_{\ell,II}^{E}$ können in beliebiger Weise im zweiten oder dritten Quadranten gegen unendlich gehen .

Die Integrationswege der antikausalen Greenschen Funktion sind durch

$$C^{\varkappa}(-\tfrac{\tau}{2}) \equiv C^{\varkappa -} = \Gamma_{\tau}^{-} \quad \text{für} \quad \varkappa = 1,3$$

$$C^{\varkappa}(-\tfrac{\tau}{2}) \equiv C^{\varkappa -} = \frac{1+\lambda}{2}\,\Gamma_{\ell,I}^{-} + \frac{1-\lambda}{2}\,\Gamma_{\ell,II}^{-} \quad \text{für} \quad \varkappa = 2,4 \qquad (4.20)$$

gegeben.

Die Integrationswege Γ_{τ}^{-}, $\Gamma_{\ell,I}^{-}$ und $\Gamma_{\ell,II}^{-}$ sind in Fig. 6 skizziert.

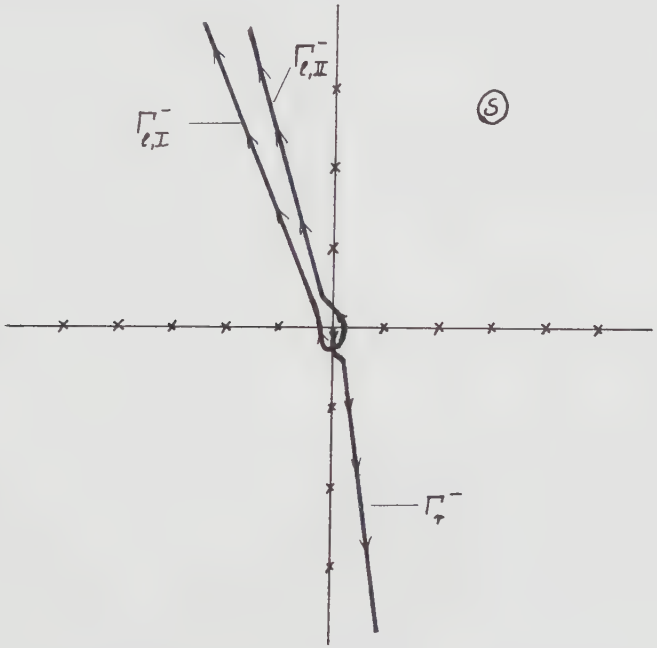

Fig. 6 Die Integrationswege der antikausalen Greenschen Funktion. Der Weg Γ_{τ}^{-} kann in beliebiger Weise im vierten Quadranten gegen unendlich gehen. Die Wege $\Gamma_{\ell,I}^{-}$ und $\Gamma_{\ell,I}^{-}$ können in beliebiger Weise im zweiten Quadranten gegen unendlich gehen.

Zusammenfassung

Unter Zuhilfenahme des Euklidischen Postulates sind wir zu folgendem Ergebnis für die Greensche Funktion eines masselosen geladenen Spin-1 Teilchens mit gyromagnetischem Moment $g_J = 2$ in einem homogenen elektromagnetischen Feld gekommen. Die kausale, Euklidische und antikausale Greensche Funktion berechnen sich gemäß (4.8), (4.9) mit $\varphi = +\pi/2$, $\varphi = 0$ bzw. $\varphi = -\pi/2$ und den in (4.18), (4.19) bzw. (4.20) angegebenen Integrationswegen.

Aus Gründen der Einfachheit wird man in (4.18-20) nur $\lambda = -1$, $\lambda = 0$, und $\lambda = +1$ in Betracht ziehen.

Also

$$\lambda = \begin{cases} -1 & (4.21a) \\ 0 & (4.21b) \\ +1 & (4.21c) \end{cases}$$

Für (4.21a) wird für $\varkappa = 2{,}4$ der Ursprung oberhalb der reellen Achse vom Integrationsweg umgangen, für (4.21c) wird er unterhalb der reellen Achse umgangen, und für (4.21b) ergibt sich der Mittelweg zwischen den obigen beiden Fällen.

Welche Wahl die physikalisch sinnvolle ist, wollen wir hier in diesem Kapitel nicht entscheiden. (Siehe jedoch Kap.9,Gl. (9.55).) Aufgrund des Euklidischen Postulates sollte diese Wahl zwischen (4.12a),(4.21b) und (4.21c) unabhängig von φ sein. Sie sollte also für die kausale Greensche Funktion gleich wie für die Euklidische und antikausale Greensche Funktion ausfallen.

Sie sollte deswegen auch unabhängig von der speziellen Feldkonfiguration ausfallen.

5. Das kovariant-konstante Feld

In diesem Kapitel soll kurz auf die Bedeutung des kovariant-konstanten Feldes eingegangen werden. Es ist durch

$$D_\varrho^{ij} G_{\mu\nu}^{j} = 0 \quad \text{oder kurz} \quad D_\varrho \cdot G_{\mu\nu} = 0 \tag{5.1}$$

definiert. Hierbei ist D_ϱ^{ij} die in (3.14a) definierte kovariante Ableitung:

$$D_\varrho^{ij} = \delta^{ij}\partial_\varrho + g\, c^{ikj} A_\varrho^{k} \quad \text{oder} \quad D_\varrho = 1\,\partial_\varrho + ig\, T_c^{k} A^{k} \tag{5.2}$$

Unter Benutzung von (5.1) erhalten wir

$$[D_\varrho, D_\varrho]\, G_{\mu\nu} = 0 \tag{5.3}$$

und mit Hilfe von

$$[D^\mu, D^\nu] = -ig\, T_c^{k} G^{k\mu\nu} \tag{5.4}$$

folgt weiter

$$c^{ijk}\, G_{\varrho\varrho}^{i}\, G_{\mu\nu}^{k} = 0 \tag{5.5a}$$

oder

$$G_{\varrho\varrho}\, T_c^{i}\, G_{\mu\nu} = 0 \tag{5.5b}$$

Da die T_c^{i} anti-symmetrische linear unabhängige Matrizen sind ergibt sich folgende Gestalt für die Lösung von (5.1).

$$G_{\mu\nu}^{k}(x) = n^{k}(x)\, F_{\mu\nu}(x) \tag{5.6}$$

Für den Colour-Vektor $n^{k}(x)$ können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$n^2(x) \equiv n^i(x) n^i(x) = 1$$

oder kurz

$$n^2 = n^i n^i = 1 \tag{5.7}$$

annehmen .

Setzen wir (5.6) in (5.1) ein und benützen dabei die Antisymmetrie von T_c , so finden wir

$$n^2(x) \partial_\varrho F_{\mu\nu}(x) = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} \partial_\varrho (n^2(x))$$

Mit Hilfe von (5.7) ergibt sich deshalb

$$\partial_\varrho F_{\mu\nu}(x) = 0$$

Also

$$G^k_{\mu\nu}(x) = n^k(x) F_{\mu\nu} \tag{5.8}$$

In [32] wird gezeigt , daß man immer eine Eichung finden kann in der auch

$$\partial_\varrho n^k(x) = 0$$

gilt .

Wir werden deshalb im Folgenden stets annehmen , daß das kovariant-konstante Feld durch

$$G^k_{\mu\nu}(x) = G^k_{\mu\nu} = n^k F_{\mu\nu} \tag{5.9}$$

mit konstanten n^k und konstanten $F_{\mu\nu}$ gegeben ist .

Als Vektorpotential wählen wir hier

$$A^{\mu k}(x) = -\frac{1}{2} n^k F^{\mu\nu}(x - x')_\nu \quad . \tag{5.10}$$

6. Der Gluon-Propagator im kovariant-konstanten Feld

Hier wollen wir nun die Greensche Funktion der Gluonen im kovariant-konstanten Feld (5.9), (5.10) berechnen.
Sie ist gemäß (3.11)

$$\Delta^{YM}[A^i_\mu] = \frac{1}{D^2 - 2igT^k_c G^k + (\frac{1}{\xi} - 1)DD} \tag{6.1}$$

mit

$$(D^2)^\mu{}_\nu = D_\rho D^\rho g^\mu{}_\nu \quad , \tag{6.2a}$$

$$(DD)^\mu{}_\nu = D^\mu D_\nu \quad . \tag{6.2b}$$

Hierbei ist D^μ die in (5.2) definierte kovariante Ableitung.
Um (6.1) in eine bequemere Form zu bringen, benötigen wir einige Hilfsformeln.

$$(D^2 - 2igT^k G^k)(DD) = (DD)(DD) \tag{6.3a}$$

$$(DD)(D^2 - 2igT^k G^k) = (DD)(DD) \tag{6.3b}$$

und

$$[(D^2 - 2igT^k G^k), (DD)]_- = 0 \tag{6.3c}$$

Diese Formeln gelten allgemein für Felder die die freie Feldgleichung

$$D^\mu G_{\mu\nu} = 0 \tag{6.4}$$

erfüllen. Insbesondere also für kovariant-konstante Felder.
Eine Gleichung die sich von (6.3a-c) leicht ableiten läßt, ist

$$\left(\frac{DD}{D^2 - 2ig\,T_c^k G^k}\right)^n = \frac{DD}{D^2 - 2ig\,T_c^k G^k} \qquad (6.5)$$

für n = 1,2,3,...

Dies ergibt für (6.1)

$$\Delta^{Y.M.}[A_\mu^i] = \left(1 + (\xi - 1)\frac{DD}{D^2 - 2ig\,T_c^k G^k}\right)\frac{1}{D^2 - 2ig\,T_c^k G^k} \qquad (6.6)$$

Benützen wir (5.9) und (5.10) so finden wir

$$\Delta^{Y.M.}[A_\mu^i] = \left(1 + (\xi - 1)\frac{DD}{D^2 - 2ig(T_c^k n^k)F}\right)\frac{1}{D^2 - 2ig(T_c^k n^k)F} \qquad (6.7)$$

mit der speziellen kovarianten Ableitung

$$D_\mu = 1\,\partial_\mu + ig(T_c^k n^k)A_\mu \qquad (6.8)$$

wobei A durch

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = const. \qquad (6.9)$$

definiert ist. Ferner ist

$$n^i n^i = 1 \quad , \quad n^i = const. \qquad (6.10)$$

Vergleichen wir die Greensche Funktion (6.7) für $\xi = 1$ mit der in (4.1) definierten Greenschen Funktion für ein masseloses geladenes Spin-1 Teilchen, so sehen wir, daß beide Greenschen Funktionen formal identisch sind; statt e in (4.1) haben wir hier in (6.7) $g(T_c^k n^k)$ zu setzen.

$$e \longrightarrow g\,(T_c^k n^k) \qquad (6.11)$$

Wir können deshalb die in Kapitel 4 gefundenen Ergebnisse auf (6.7) mit $\xi = 1$ anwenden. Wir wollen hier die Greensche Funktion in einer kompakten Matrixschreibweise darstellen, und nicht wie in Kapitel 4 nur die Eigenwerte $\Delta^{(n)}(x,x';\varphi)$ dieser Matrix betrachten. Zu diesem Zwecke schreiben wir die Matrix $F^{\mu}{}_{\nu}$ als

$$F^{\mu}{}_{\nu} = \sum_{\iota,\varkappa=1}^{4} (U_F^{+})^{\mu}{}_{\iota} (F')^{\iota}{}_{\varkappa} (U_F)^{\varkappa}{}_{\nu} \qquad (6.12)$$

mit

$$(F')^{\iota}{}_{\varkappa} = \delta^{\iota}{}_{\varkappa} F'_{\varkappa} \qquad \text{für} \quad \iota,\varkappa = 1,2,3,4 \qquad (6.13)$$

Hierbei sind die $F'_{\varkappa}$ die in (4.6) definierten Eigenwerte der Matrix $F^{\mu}{}_{\nu}$, und U_F ist eine unitäre Matrix, die $F^{\mu}{}_{\nu}$ diagonalisiert. Auf ähnliche Weise diagonalisieren wir auch die Matrix

$$\hat{n}_c = n^k T_c^k \quad . \qquad (6.14)$$

$$(\hat{n}_c)^{ij} = (U_{n_c}^{+})^{i\ell} (\hat{n}_c')^{\ell m} (U_{n_c})^{mj} \qquad (6.15)$$

mit

$$(\hat{n}_c')^{\ell m} = \delta^{\ell m} \hat{n}'_{c(\ell)} \quad . \qquad (6.16)$$

Hierbei sind die $\hat{n}'_{c(\ell)}$ die (reellen) Eigenwerte der Matrix (6.14).

Nun definieren wir eine Matrix β durch

$$\beta^{ij\mu}{}_{\nu} = \sum_{i,\varkappa=1}^{4} (U_F^{+})^{\mu}{}_{\iota} (U_{n_c}^{+})^{i\iota} (\beta')^{\ell m i}{}_{\varkappa} (U_{n_c})^{mj} (U_F)^{\varkappa}{}_{\nu} \qquad (6.17)$$

mit

$$(\beta')^{\ell m i}{}_{\varkappa} = \delta^{\ell m} \delta^{i}{}_{\varkappa} \beta'_{(\varkappa,\ell)} \qquad (6.18)$$

wobei

$$\beta'_{(1,\ell)} = \beta'_{(3,\ell)} = \frac{\hat{n}'_{c(\ell)}}{|\hat{n}'_{c(\ell)}|} \qquad (6.19a)$$

für alle ℓ mit $\hat{n}'_{c(\ell)} \neq 0$

$$\beta'_{(2,\ell)} = \beta'_{(4,\ell)} = -\frac{\hat{n}'_{c(\ell)}}{|\hat{n}'_{c(\ell)}|} \qquad (6.19b)$$

und

$$\beta'_{(1,\ell)} = \beta'_{(3,\ell)} = \varepsilon_\ell \qquad (6.19c)$$

für alle ℓ mit $\hat{n}'_{c(\ell)} = 0$

$$\beta'_{(2,\ell)} = \beta'_{(4,\ell)} = -\varepsilon_\ell \qquad (6.19d)$$

Hierbei wird je nach Belieben $\varepsilon_\ell = 1$ oder $\varepsilon_\ell = -1$ gewählt.
Die folgenden Formeln sind von dieser Wahl unabhängig.
Nach Konstruktion der Matrix β gelten dann folgende Vertauschungsrelationen.

$$[\beta, F] = 0, \qquad (6.20)$$

$$[\beta, \hat{m}_c] \equiv [\beta, m^k T_c^k] = 0; \qquad (6.21)$$

außerdem gilt natürlich auch

$$[F, \hat{m}_c] \equiv [F, m^k T_c^k] = 0. \qquad (6.22)$$

Folgen wir nun den Argumenten von Kapitel 4 , so finden wir für den Gluon-Propagator im kovariant-konstanten Colour-Feld in der Feynman-Eichung $\xi = 1$:

$$\Delta_+^{Y.M.}[A_\mu^i](x-x')\Big|_{\xi=1} = i\int_{\Gamma_\tau^+} ds\,\frac{1+\beta}{2}\,\Delta_+^{Y.M.}[A_\mu^i](s;x-x')\Big|_{\xi=1} + i\int_{\Gamma_\ell^+} ds\,\frac{1-\beta}{2}\,\Delta_+^{Y.M.}[A_\mu^i](s;x-x')\Big|_{\xi=1} \tag{6.23}$$

mit

$$\Delta_+^{Y.M.}[A_\mu^i](s;x-x')\Big|_{\xi=1} = \frac{1}{(4\pi)^2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\,tr_L \ln\frac{\sin(g n^k T_c^k F s)}{g n^k T_c^k F}\right\} \exp\left\{\frac{1}{4}(x-x')_\mu g T_c^k n^k F \cot(g n^k T_c^k F s)(x-x')_\mu\right\} e^{2is g T_c^k n^k F}\,, \tag{6.24}$$

und

$$\Gamma_\ell^+ = \frac{1+\lambda}{2}\,\Gamma_{\ell,I}^+ + \frac{1-\lambda}{2}\,\Gamma_{\ell,II}^+ \,. \tag{6.25}$$

Hierbei sind Γ_τ^+ , $\Gamma_{\ell,I}^+$, $\Gamma_{\ell,II}^+$ die in Fig. 4 skizzierten Integrationswege und $\lambda = -1$, 0 , oder $+1$ (vgl.(4.21a-c)) .

An dieser Stelle wollen wir nun einige kritische Bemerkungen machen . Das Hauptziel dieses Kapitels ist es, den kausalen Gluon-Propagator in einem kovariant-konstanten Colour-Feld zu finden . Mit Hilfe der Überlegungen von Kapitel 4 ergab sich der in (6.23) , (6.24) angegebene Propagator (falls man $\xi = 1$ wählt) . Das Hauptargument für die Herleitung von (6.23) (6.24) ist das Euklidische Postulat gewesen . Allerdings haben

wir bei dieser Herleitung unserer Resultate auch noch eine versteckte Annahme gemacht, die von allergrößter Bedeutung ist. Wir haben im Stillen nämlich stets vorausgesetzt, daß es überhaupt sinnvoll ist, nach dem Gluon-Propagator in einem kovariant-konstanten Colour-Feld zu fragen. Nun ist es aber durchaus denkbar, daß aufgrund von irgendwelchen dynamischen Prinzipien der QCD in der Natur überhaupt keine auch nicht annähernd kovariant-konstante Colour-Felder verwirklicht werden.
In diesem Falle ist es dann vollkommen sinnlos, überhaupt nach einem Gluon-Propagator in einem kovariant-konstanten Colour-Feld zu suchen. Wir wollen uns jedoch im Folgenden auf den naiven Standpunkt stellen, daß es sinnvoll ist, den Gluon-Propagator in einem kovariant-konstanten Colour-Feld zu betrachten und mit dem in (6.23), (6.24) angegebenen Propagator rechnen.
Dies gibt uns dann allerdings auch einige merkwürdige Probleme auf. Versuchen wir nämlich den kausalen Propagator nach der konventionellen Methode

$$\Delta_+^{\text{Y.M.}}[A^i_\mu](x-x')\Big|_{g=1} \stackrel{?}{=} \langle x| \frac{1}{D^2 - 2ig T_c^k G^k - i\varepsilon} |x'\rangle \tag{6.26a}$$

$$\stackrel{?}{=} i \int_{\tau=0}^{\infty} d\tau \, \langle x| \exp\{-i[D^2 - 2ig T_c^k G^k - i\varepsilon]\tau\} |x'\rangle \tag{6.26b}$$

$$= i \int_{\tau=0}^{\infty} i d\tau \, \Delta_+^{\text{Y.M.}}[A^i_\mu](i\tau, x-x')\Big|_{g=1} \tag{6.26c}$$

zu berechnen, so stellen wir fest, daß das Integral über τ in

(6.26c) – abgesehen von dem Sonderfall eines reinen colour--magnetischen Feldes – gar nicht existiert. Es gibt also überhaupt keine kausale Greensche Funktion, wie wir sie aus der Elektrodynamik mit Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen gewohnt sind. Der Gluon-Propagator (6.23) erfüllt zwar noch das Euklidische Postulat und beschreibt im hochenergetischen Bereich kausal propagierende Teilchen, aber im niederenergetischen Bereich beeinflußt das äußere kovariant-konstante Feld die Gluonen so stark, daß von einer kausalen Propagation keine Rede mehr sein kann. So wurde z.B. für den Fall eines reinen colour--magnetischen Feldes von Nielsen und Olesen [8],[24] gefunden, daß der Gluon-Propagator tachyonische Moden enthält. Es zeigt sich nämlich, daß die Gluonen im niedrigsten Landau-Niveau mit Spin "up" und kleinen longitudinalen Impulsen, $k_3^2 < gB$, als Tachyonen propagieren. [x]) Betrachtet man den Gluon-Propagator in einem kovariant-konstanten colour-elektrischen Feld, so zeigt sich sogar, daß die niederenergetischen Gluonen antikausal propagieren. Diese Verletzung der Kausalität ist der eigentliche Grund dafür, daß der Integrationsweg Γ_ℓ^+ in (6.23) im dritten Quadranten gegen unendlich gehen muß. Im Folgenden wollen wir solche Probleme außer acht lassen und

---

[x]) Die Verletzung der Kausalität von Teilchen mit Spin 1 und höher in äußeren Feldern wurde schon vor längerer Zeit von Velo und Zwanziger [25] studiert. Der Spezialfall eines Vektor Spin-1 Teilchens in einem homogenen Magnetfeld wurde von Tsai und Yildiz genauer untersucht. [26]

den Propagator (6.23) als Ausgangspunkt unserer Überlegungen machen.

Wir wollen nun auch noch den Propagator (6.7) für beliebige $\xi \geq 0$ berechnen. Hierzu benötigen wir einige Hilfsformeln:

Als erste nützliche Hilfsformel benützen wir

$$\Delta_+^{Y.M.}[\mu^2 | A_\mu^k](x-x')\Big|_{\xi=1} \equiv \langle x | \frac{1}{D^2 - 2ig(T_c^k n^k)F + \beta\mu^2} | x' \rangle$$

$$= i \int_{\Gamma_r^+} ds \frac{1+\beta}{2} e^{-s\beta\mu^2} \Delta_+^{Y.M.}[A_\mu^i](s; x-x')\Big|_{\xi=1}$$

$$+ i \int_{\Gamma_\ell^+} ds \frac{1-\beta}{2} e^{-s\beta\mu^2} \Delta_+^{Y.M.}[A_\mu^i](s; x-x')\Big|_{\xi=1} \qquad (6.27)$$

Die Herleitung dieser Formel ist vollständig analog zu der Herleitung von (6.23); man hat nur zusätzlich den "Massenterm" $\beta\mu^2$ mitzuberücksichtigen. Hierbei ist es nützlich zu wissen, daß

$$\beta^2 = 1 \qquad (6.28)$$

und somit

$$\beta \frac{1+\beta}{2} = + \frac{1+\beta}{2}, \qquad (6.29a)$$

$$\beta \frac{1-\beta}{2} = - \frac{1-\beta}{2} \qquad (6.29b)$$

gilt.

Differenzieren wir (6.27) n-1 - fach nach μ^2 und setzen dann μ^2 gleich null, so ergibt sich

$$\langle x|\left(\frac{1}{D^2-2ig\,T_c^k n^k F}\right)^n|x'\rangle$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\; i\int_{\Gamma_+^+}\frac{ds}{s^{1-n}}\;\frac{1+\beta}{2}\;\Delta_+^{Y.M.}[A_\mu^i](s;x-x')\Big|_{\beta=1} \qquad (6.30)$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}\; i\int_{\Gamma_\ell^+}\frac{ds}{s^{1-n}}\;\frac{1-\beta}{2}\;\Delta_+^{Y.M.}[A_\mu^i](s;x-x')\Big|_{\beta=1} \qquad \text{für } n=1,2,\ldots$$

Benützen wir nun

$$D^\mu = \partial^\mu + \frac{i}{2}\,g\,T_c^k n^k F^\mu{}_\nu\,(x-x')^\nu$$

für die kovariante Ableitung, so finden wir

$$\langle x|(DD)\left(\frac{1}{D^2-2ig\,T_c^k n^k F}\right)^n|x'\rangle \qquad (6.31)$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\; i\int_{\Gamma_+^+}\frac{ds}{s^{2-n}}\;\Xi[A_\mu^i](s;x-x')\,\frac{1+\beta}{2}\,\Delta_+^{Y.M.}[A_\mu^i](s;x-x')\Big|_{\beta=1}$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}\; i\int_{\Gamma_\ell^+}\frac{ds}{s^{2-n}}\;\Xi[A_\mu^i](s;x-x')\,\frac{1-\beta}{2}\,\Delta_+^{Y.M.}[A_\mu^i](s;x-x')\Big|_{\beta=1} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

Hierbei ist

$$\Xi[A_\mu^i](s;x-x')^\mu{}_\nu = \left(\tfrac{1}{2}\,g\,T_c^k n^k F s\left[\cot(g\,T_c^k n^k F s) - i\right]\right)^\mu{}_\nu$$

$$+\tfrac{1}{4}\left(g\,T_c^k n^k F s\left[\cot(g\,T_c^k n^k F s)+i\right]\right)^\mu{}_\beta\,(x-x')^\beta \qquad (6.32)$$

$$\cdot\, g_{\nu\lambda}\left(g\,T_c^k n^k F s\left[\cot(g\,T_c^k n^k F s)+i\right]\right)^\lambda{}_\delta\,(x-x')^\delta$$

Insgesamt erhalten wir damit für den Gluon-Propagator

$$\Delta_+^{Y.M.}[A_\mu^i](x-x') =$$

$$i\int_{\Gamma_\tau^+} ds\left(1+(\xi-1)\Xi[A_\mu^i](s;x-x')\right)\frac{1+\beta}{2}\left\{\Delta_+^{Y.M.}[A_\mu^i](s;x-x')\Big|_{\xi=1}\right\}$$

$$+i\int_{\Gamma_t^+} ds\left(1+(\xi-1)\Xi[A_\mu^i](s;x-x')\right)\frac{1-\beta}{2}\left\{\Delta_+^{Y.M.}[A_\mu^i](s;x-x')\Big|_{\xi=1}\right\} \qquad (6.33)$$

7. Der Faddeev-Popov Propagator im kovariant-konstanten Feld

Der Faddeev-Popov Propagator ist gemäß (3.12) durch

$$\Delta^{F.P.}[A^i_\mu] = \frac{1}{D^2} \tag{7.1}$$

gegeben. In Übereinstimmung mit Kapitel 6 haben wir folgende beide Möglichkeiten zu betrachten.

$$\Delta^{F.P.}_{+,\tau}[A^i_\mu](x-x') = i\int_{\Gamma^+_\tau} ds\, \Delta^{F.P.}_{+}[A^i_\mu](s;x-x') \tag{7.2a}$$

$$\Delta^{F.P.}_{+,\ell}[A^i_\mu](x-x') = i\int_{\Gamma^+_\ell} ds\, \Delta^{F.P.}_{+}[A^i_\mu](s;x-x') \tag{7.2b}$$

mit

$$\Delta^{F.P.}_{+}[A^i_\mu](s;x-x') = \frac{1}{(4\pi)^2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\,tr_L \ln\frac{\sin(gn^kT_c^kFs)}{gn^kT_c^kF}\right\}$$
$$\exp\left\{\frac{1}{4}(x-x')gT_c^kn^kF\cot(gn^kT_c^kFs)(x-x')\right\} \tag{7.3}$$

Eine direkte Verallgemeinerung von (7.2a,b) ist

$$\Delta^{F.P.}_{+,\tau}[\mu^2|A^i_\mu](x-x') = \langle x|\frac{1}{D^2+\mu^2}|x'\rangle_\tau$$
$$= i\int_{\Gamma^+_\tau} ds\, e^{-s\mu^2}\,\Delta^{F.P.}_{+}[A^i_\mu](s;x-x') \tag{7.4a}$$

$$\Delta^{F.P.}_{+,\ell}[\mu^2|A^i_\mu](x-x') = \langle x|\frac{1}{D^2-\mu^2}|x'\rangle_\ell$$
$$= i\int_{\Gamma^+_\ell} ds\, e^{+s\mu^2}\,\Delta^{F.P.}_{+}[A^i_\mu](s;x-x') \tag{7.4b}$$

8. Der Quark-Propagator im kovariant-konstanten Feld

Der Quark-Propagator ist durch

$$G_+[m \mid A_\mu^k] = \frac{1}{-i\hbar c\, \gamma_\mu D_t^\mu + mc^2 - i\varepsilon} \tag{8.1}$$

mit der kovarianten Ableitung

$$D_t^\mu = \partial^\mu - ig\, T_t^k A^{k\mu} = \partial^\mu - ig\, T_t^k n^k A^\mu \tag{8.2}$$

definiert. Mit Hilfe von

$$[\, D_t^\mu ,\, D_t^\nu \,] = -ig\, T_t^k n^k F^{\mu\nu} \tag{8.3}$$

läßt er sich auch in die Form

$$G_+[m \mid A_\mu^k] = (\hbar c)^{-2} (i\hbar c\, \gamma_\mu D_t^\mu + mc^2) \frac{1}{D_t^2 - \frac{1}{2} g\, T_t^k n^k \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (\frac{mc}{\hbar})^2 - i\varepsilon} \tag{8.4}$$

bringen.

Benützen wir sinngemäß die Resultate von Schwinger [21], so finden wir

$$G_+[m \mid A_\mu^k] = \frac{i}{\hbar c} \int_{\Gamma_\tau^+} ds\, e^{-s(\frac{mc}{\hbar})^2} \left\{ \frac{mc}{\hbar} - \frac{1}{2} \gamma_\mu [g T_t^k n^k F (1 - i\cot(s g T_t^k n^k F))]^\mu{}_\nu (x-x')^\nu \right\} \Delta_t[A_\mu^i](s; x-x') \tag{8.5}$$

mit

$$\Delta_t[A_\mu^i](s; x-x') = \exp\left\{ -\frac{1}{2} tr_L \ln \frac{\sin(g T_t^k n^k F s)}{g T_t^k n^k F} \right\}$$
$$\exp\left\{ \frac{1}{4} (x-x') g T_t^k n^k F \cot(s g T_t^k n^k F) (x-x') \right\}$$
$$\exp\left\{ \frac{1}{2} g T_t^k n^k \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} s \right\} \frac{1}{(4\pi)^2} \tag{8.6}$$

9. Die effektive Wirkung in kovariant-konstanten Colour-Feldern

In den vorigen Kapiteln haben wir nun die nötigen Mittel bereitgestellt, um die effektive Wirkung (3.16) in kovariant-konstanten Colour-Feldern zu berechnen. Um (3.16) auszuwerten, benötigen wir zunächst die Logarithmen der Greenschen Funktionen.
Als erstes betrachten wir den Logarithmus von (6.6).

$$\ln\left(\Delta_+^{Y.M.}[A_\mu^i]\right)^{-1} = \ln\left(D^2 - 2ig T_c^k G^k\right)_+ - \ln\left(1 + (\xi - 1)\frac{DD}{D^2 - 2ig T_c^k G^k}\right)_+$$

$$= \ln\left(D^2 - 2ig T_c^k G^k\right)_+ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (\xi - 1)^n \left(\frac{DD}{D^2 - 2ig T_c^k G^k}\right)_+^n$$

$$\overset{(6.5)}{=} \ln\left(D^2 - 2ig T_c^k G^k\right)_+ - (\ln \xi)\left(\frac{DD}{D^2 - 2ig T_c^k G^k}\right)_+ \qquad (9.1)$$

Benützen wir

$$\frac{d}{d\mu^2} \ln\left[\left(D^2 - 2ig T_c^k G^k\right) + \beta\mu^2\right]_+ = \beta \frac{1}{D^2 - 2ig T_c^k G^k + \beta\mu^2} \qquad (9.2)$$

so erhalten wir nach Integration mit Hilfe von (6.27)

$$\ln\left[D^2 - 2ig T^k G^k\right]_+ = -\beta \int_0^\infty d\mu^2 \, \Delta_+^{Y.M.}[\mu^2 | A_\mu^i]\Big|_{\xi=1}$$

$$+ \lim_{\mu^2 \to \infty} \ln\left[\left(D^2 - 2ig T_c^k G^k\right) + \beta\mu^2\right]$$

$$= -\beta \int_0^\infty d\mu^2 \, \Delta_+^{Y.M.}[\mu^2 | A_\mu^i]\Big|_{\xi=1}$$

$$+ \lim_{\mu^2 \to \infty} \left\{ \ln(\beta\mu^2) + \ln\Big(1 + \underbrace{\frac{D^2 - 2ig T_c^k G^k}{\beta\mu^2}}_{\longrightarrow 0}\Big) \right\} \qquad (9.3)$$

$$= -\beta \int_0^\infty d\mu^2 \, \Delta_+^{Y.M.}[\mu^2 | A_\mu^i]\Big|_{\xi=1} + \text{const.}$$

$$\ln\left(\Delta_{+}^{Y.M.}[A_{-}]\right)^{-1} = \text{const.} - \beta \int_{0}^{\infty} d\mu^2 \, \Delta_{+}^{Y.M.}[\mu^2 | A_{-}^{i}]\Big|_{\beta=1} - (\ln \beta)\left(\frac{DD}{D^2 - 2ig T_c^k G^k}\right)_{+} \tag{9.4}$$

Auf ähnliche Weise können wir den Logarithmus des Faddeev--Popov Propagators (7.1) berechnen. Da die Faddeev-Popov Geister eng mit den longitudinalen Moden der Gluonen verknüpft sind, müssen wir hier den Mittelwert von (7.2a) und (7.2b) benützen. Genauer schreiben wir

$$\ln\left(\Delta_{+}^{F.P.}[A_{-}^{i}]\right)^{-1} := \frac{1}{2}\left[\ln\left(\Delta_{+,T}^{F.P.}[A_{-}^{i}]\right)^{-1} + \ln\left(\Delta_{+,\ell}^{F.P.}[A_{-}^{i}]\right)^{-1}\right] \tag{9.5}$$

Mit Überlegungen, die denjenigen, die zu (9.4) führten, ähnlich sind, erhalten wir dann

$$\ln\left(\Delta_{+}^{F.P.}[A_{\mu}^{i}]\right)^{-1} = \text{const.} - \int_{0}^{\infty} d\mu^2 \frac{1}{2}\left\{\Delta_{+,T}^{F.P.}[\mu^2 | A_{-}^{i}] - \Delta_{+,\ell}^{F.P.}[\mu^2 | A_{-}^{i}]\right\} \tag{9.6}$$

Für die Fermionen folgt schließlich auch noch

$$\ln\left(G_{+}[m | A_{-}^{i}]\right)^{-1} = \text{const.} - \int_{mc^2}^{\infty} d(\tilde{m}c^2)\, G_{+}[\tilde{m} | A_{-}^{i}] \tag{9.7}$$

Setzen wir (9.4), (9.6) und (9.7) in (3.16) ein, so finden wir

$$\tilde{\Gamma}[A] = Z_3\, S^{cl}[A]$$

$$- \frac{i}{2}\hbar c \int d^4x\, tr_c\, tr_L \Big\{ \beta \int_0^\infty d\mu^2\, \Delta_+^{Y.M.}[\mu^2 | A_-^i](x-x)\Big|_{\xi=1}$$

$$+ \ln\xi \langle x | \frac{DD}{D^2 - 2ig T_c^k G^k} | x \rangle_+ \Big\}$$

$$+ i\hbar c \int d^4x\, tr_c \int_0^\infty d\mu^2 \frac{1}{2} \Big\{ \Delta_{+,T}^{F.P.}[\mu^2 | A_-^i](x-x) - \Delta_{+,\ell}^{F.P.}[\mu^2 | A_-^i](x-x)$$

$$+ i\hbar c \int d^4x\, tr_c\, tr_\gamma \sum_{k=1}^{N} \int_{m_k c^2}^\infty d(mc^2)\, G_+[m | A_-^i](x-x)$$

$$(x^0 \to -i x_4)$$

$$+ \text{const.} \qquad (9.8)$$

Benützen wir (6.27),(6.31),(7.4a,b) und (8.5), so ergibt sich

$$\tilde{\Gamma}[A] = \int d^4x\, \mathcal{L}^{eff}[A;x] \qquad (9.9)$$

wobei

$$\mathcal{L}^{eff}[A,x] = Z_3 \frac{1}{2} n^i n^i (\vec{E}^2 - \vec{B}^2)$$

$$+ \frac{1}{2}\hbar c \int_0^\infty d\mu^2\, tr_c\, tr_L \int_{\tilde{\Gamma}_+^+} ds\, e^{-s\mu^2} \frac{1+\beta}{2}\, \Delta_+^{Y.M.}[A_-^i](s;x-x)\Big|_{\xi=1}$$

$$- \frac{1}{2}\hbar c \int_0^\infty d\mu^2\, tr_c\, tr_L \int_{\tilde{\Gamma}_\ell^-} ds\, e^{+s\mu^2} \frac{1-\beta}{2}\, \Delta_+^{Y.M.}[A_-^i](s;x-x)\Big|_{\xi=1}$$

$$+ (\ln\xi)\frac{1}{2}\hbar c\, tr_c\, tr_L \int_{\tilde{\Gamma}_T^+} ds\, \frac{1+\beta}{2} \Big(\frac{1}{2} g T_c^k n^k F s\, [\cot(g T_c^k n^k F s) - i]\Big) \Big\{ \Delta_+^{Y.M.}[A_-^i](s;$$

$$+ (\ln\xi)\frac{1}{2}\hbar c\, tr_c\, tr_L \int_{\tilde{\Gamma}_\ell^+} ds\, \frac{1-\beta}{2} \Big(\frac{1}{2} g T_c^k n^k F s\, [\cot(g T_c^k n^k F s) - i]\Big) \Big\{ \Delta_+^{Y.M.}[A_-^i](s;x$$

$$+$$

$$
\begin{aligned}
&- \tfrac{1}{2}\hbar c \int_0^\infty d\mu^2\, tr_c \int_{\tilde\Gamma_\tau^+} ds\, e^{-s\mu^2}\; \Delta_+^{F.P.}[A_\mu^i](s;x-x) \\
&+ \tfrac{1}{2}\hbar c \int_0^\infty d\mu^2\, tr_c \int_{\tilde\Gamma_\ell^+} ds\, e^{+s\mu^2}\; \Delta_+^{F.P.}[A_\mu^i](s;x-x) \\
&- \hbar c \sum_{k=1}^{N} \int_{\frac{mc}{\hbar}}^\infty d\left(\tfrac{mc}{\hbar}\right) \tfrac{mc}{\hbar}\; tr_c\, tr_g\; \Delta_t[A_\mu^i](s;x-x)\, e^{-s\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2} \\
&+ const.
\end{aligned}
\tag{9.10}
$$

mit

$$
\tilde\Gamma_\ell^+ = \frac{1+\lambda}{2}\,\tilde\Gamma_{\ell,I}^+ + \frac{1-\lambda}{2}\,\tilde\Gamma_{\ell,II}^+ \tag{9.11}
$$

Hierbei sind $\tilde\Gamma_\tau^+$, $\tilde\Gamma_{\ell,I}^+$ und $\tilde\Gamma_{\ell,II}^+$ die in Fig. 7 skizzierten Wege .

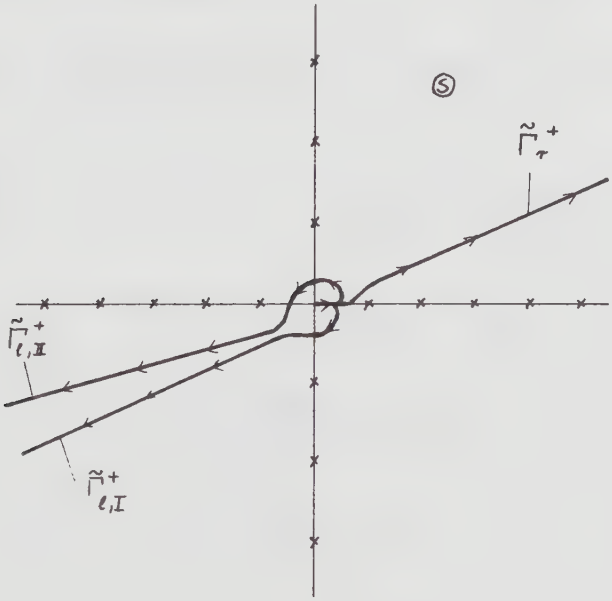

Fig. 7

Die Rotation von den Wegen Γ_τ^+ , $\Gamma_{\ell,I}^+$, $\Gamma_{\ell,II}^+$ in Fig. 4 zu den Wegen $\tilde{\Gamma}_\tau^+$, $\tilde{\Gamma}_{\ell,I}^+$, $\tilde{\Gamma}_{\ell,II}^+$ in Fig. 7 ist eine Folge der Vorschrift $x^0 \to -ix_4$ in (9.8). Diese Rotation ist wichtig für eine korrekte Renormierung.

Führen wir in (9.10) die Integration über μ^2 und $\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2$ durch, so finden wir

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{eff}[A,x] \;&=\; Z_3\,\tfrac{1}{2}\,n^i n^i(\vec{E}^2-\vec{B}^2)\\
&+\tfrac{1}{2}\hbar c\;tr_c\,tr_L\int\limits_{\tilde{\Gamma}_\tau^+}\frac{ds}{s}\;\frac{1+\beta}{2}\left(1+(\ln\xi)\tfrac{1}{2}\,g\,T_c^k n^k F s\left[\cot(g\,T_c^k n^k F s)-i\right]\right)\\
&\qquad\cdot\left\{\Delta_+^{Y.M.}[A_\mu^i](s;x-x)\Big|_{\xi=1}\right\}\\
&+\tfrac{1}{2}\hbar c\;tr_c\,tr_L\int\limits_{\tilde{\Gamma}_\ell^+}\frac{ds}{s}\;\frac{1-\beta}{2}\left(1+(\ln\xi)\tfrac{1}{2}\,g\,T_c^k n^k F s\left[\cot(g\,T_c^k n^k F s)-i\right]\right)\\
&\qquad\cdot\left\{\Delta_+^{Y.M.}[A_\mu^i](s;x-x)\Big|_{\xi=1}\right\}\\
&-\tfrac{1}{2}\hbar c\;tr_c\int\limits_{\tilde{\Gamma}_\tau^+}\frac{ds}{s}\;\Delta_+^{F.P.}[A_\mu^i](s;x-x)\\
&-\tfrac{1}{2}\hbar c\;tr_c\int\limits_{\tilde{\Gamma}_\ell^+}\frac{ds}{s}\;\Delta_+^{F.P.}[A_\mu^i](s;x-x)\\
&-\tfrac{1}{2}\hbar c\sum_{k=1}^{N}tr_c\,tr_\gamma\int\limits_{\tilde{\Gamma}_\tau^+}\frac{ds}{s}\;e^{-s\left(\frac{m_k c}{\hbar}\right)^2}\Delta_t[A_\mu^i](s;x-x)\\
&+\text{const.}
\end{aligned}
\tag{9.12}
$$

Unter Benützung von (6.24), (7.3), (8.6) und

$$\left[\cot(gT_c^k n^k Fs) - i\right] e^{2igT_c^k n^k Fs} = \cot(gT_c^k n^k Fs) + i \qquad (9.13)$$

ergibt sich

$$\mathcal{L}^{eff}[A,x] = Z_3 \frac{1}{2} n^i n^i (\vec{E}^2 - \vec{B}^2)$$

$$+ \frac{\hbar c}{32\pi^2} tr_c tr_L \int_{\tilde{\Gamma}_\tau^+} \frac{ds}{s^3} \frac{1+\beta}{2} \left(e^{2igT_c^k n^k Fs} + \frac{1}{2}(\ln \xi) gT_c^k n^k Fs \left[\cot(gT_c^k n^k Fs) + i\right]\right) \cdot e^{-\ell_c(s)}$$

$$+ \frac{\hbar c}{32\pi^2} tr_c tr_L \int_{\tilde{\Gamma}_\ell^+} \frac{ds}{s^3} \frac{1-\beta}{2} \left(e^{2igT_c^k n^k Fs} + \frac{1}{2}(\ln \xi) gT_c^k n^k Fs \left[\cot(gT_c^k n^k Fs) + i\right]\right) e^{-\ell_c(s)}$$

$$- \frac{\hbar c}{32\pi^2} tr_c \left\{ \int_{\tilde{\Gamma}_\tau^+} \frac{ds}{s^3} e^{-\ell_c(s)} + \int_{\tilde{\Gamma}_\ell^+} \frac{ds}{s^3} e^{-\ell_c(s)} \right\}$$

$$- \frac{\hbar c}{32\pi^2} \sum_{k=1}^{N} tr_c tr_t \int_{\tilde{\Gamma}_\tau^+} \frac{ds}{s^3} \exp\left\{-\frac{1}{2} g T_t^k n^k \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} s\right\} e^{-\ell_t(s)} e^{-\left(\frac{m_t c}{\hbar}\right)^2 s} \qquad (9.14)$$

$$+ \text{const.}$$

wobei

$$\ell_c(s) = \frac{1}{2} tr_L \ln \frac{\sin(gT_c^k n^k Fs)}{gT_c^k n^k Fs} \qquad (9.15a)$$

$$\ell_t(s) = \frac{1}{2} tr_L \ln \frac{\sin(gT_t^k n^k Fs)}{gT_t^k n^k Fs} \qquad (9.15b)$$

Wir haben in (9.14) Integrale der Form

$$\int_{\tilde{\Gamma}^+} \frac{ds}{s^3} f(s)$$

wobei $\tilde{\Gamma}^+ = \tilde{\Gamma}^+_\pi$, $\tilde{\Gamma}^+ = \tilde{\Gamma}^+_\ell = \frac{1+\lambda}{2}\tilde{\Gamma}^+_{\ell,I} + \frac{1-\lambda}{2}\tilde{\Gamma}^+_{\ell,II}$

Die Integrationswege beginnen hierbei immer bei s = 0 und verlaufen dann ein kleines Stückchen entlang der positive reellen s-Achse . Nach dreimaliger partieller Integration erhalten wir deshalb

$$\int_{\tilde{\Gamma}^+} \frac{ds}{s^3} f(s) = -\frac{1}{2}\int_{\tilde{\Gamma}^+} ds\, \ln(s\mu^2)\frac{d^3}{ds^3} f(s) + \lim_{s_0\to 0^+}\left\{\frac{f(0)}{2s_0^2} + \frac{1}{s_0} f'(0) + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\ln(s_0\mu^2)\right) f''(0)\right\} \qquad (9.16)$$

Hierbei ist zu beachten , daß (9.16) überhaupt nicht von μ^2 abhängt . Die Größe μ^2 wurde nur eingeführt , damit das Argument des Logarithmus dimensionslos ist .

Beachten wir nun die in Fig. 7 skizzierten Integrationswege , so ergibt sich

$$\int_{\tilde{\Gamma}^+_\pi} \frac{ds}{s^3} f(s) = -\frac{1}{2}\int_0^\infty ds\, \ln(s\mu^2)\frac{d^3}{ds^3} f(s+i\varepsilon) + \lim_{s_0\to 0^+}\left\{\frac{f(0)}{2s_0^2} + \frac{1}{s_0} f'(0) + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\ln(s_0\mu^2)\right) f''(0)\right\} \qquad (9.17)$$

$$\int_{\tilde{\Gamma}^+_\ell} \frac{ds}{s^3} f(s) = -\frac{1}{2}\int_0^\infty ds\, \ln(-s\mu^2)\frac{d^3}{ds^3} f(s-i\varepsilon) - \frac{i\pi}{2}\lambda f''(0) + \lim_{s_0\to 0^+}\left\{\frac{f(0)}{2s_0^2} + \frac{1}{s_0} f'(0) + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\ln(s_0\mu^2)\right) f''(0)\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^\infty ds\, \ln(s\mu^2)\frac{d^3}{ds^3} f(-(s+i\varepsilon)) - \frac{i\pi}{2}\lambda f''(0) + \lim_{s_0\to 0^+}\left\{\frac{f(0)}{2s_0^2} + \frac{1}{s_0} f'(0) + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\ln(s_0\mu^2)\right) f''(0)\right\} \qquad (9.18)$$

(9.17) und (9.18) verwenden wir nur für die Beiträge der Gluonen, der Faddeev-Popov Geister und der masselosen Quarks zu (9.14). Für die Beiträge der massiven Quarks, $m_k \neq 0$, zu (9.14) benützen wir hingegen

$$\int_{\Gamma_+} \frac{ds}{s^3} e^{-s\mu^2} f(s) = \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-s\mu^2} \left(f(s+i\varepsilon) - f(0) - f'(0)\cdot s - \frac{1}{2} f''(0) s^2 \right)$$
$$+ \lim_{s_0 \to 0^+} \left\{ \frac{1}{2s_0^2} - \frac{\mu^2}{s_0} + \frac{3}{4}\mu^4 - \frac{1}{2}\gamma\mu^4 - \frac{1}{2}\mu^4 \ln(s_0\mu^2) \right\} f(0)$$
$$+ \lim_{s_0 \to 0^+} \left\{ \frac{1}{s_0} - \mu^2 + \mu^2\gamma + \mu^2 \ln(s_0\mu^2) \right\} f'(0)$$
$$- \frac{1}{2} \lim_{s_0 \to 0^+} (\gamma + \ln s_0\mu^2) f''(0) \qquad (9.19)$$
$$(\gamma = 0{,}5772\ldots)$$

Wir erhalten dann

$$\mathcal{L}^{\text{eff}}[A;x] = (1 + \zeta_3) \frac{1}{2} n^i n^i (\vec{E}^2 - \vec{B}^2)$$
$$- \frac{\hbar c}{64\pi^2} tr_c tr_L \int_0^\infty ds \ln(\mu^2 s)$$
$$\frac{d^3}{ds^3} \left(\left\{ e^{2ig\beta T_c^k n^k F s} + \frac{\ln s}{2} g T_c^k n^k F s \left[\cot((s+i\varepsilon) g T_c^k n^k F) + i\beta \right] \right\} e^{-\ell_c(s+i\varepsilon)} \right)$$
$$- \frac{\hbar c}{32\pi^2} tr_c \int_0^\infty ds \ln(\mu^2 s) \frac{d^3}{ds^3} e^{-\ell_c(s+i\varepsilon)} \qquad (9.20)$$
$$+ i\pi\lambda g^2 \hbar c \frac{11}{96\pi^2} C(T_c) \frac{1}{2} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2)$$
$$+ \frac{\hbar c}{64\pi^2} \sum_{\substack{k=1 \\ m_k=0}}^{N} tr_c tr_\gamma \int_0^\infty ds \ln(\mu^2 s) \frac{d^3}{ds^3} \left\{ \exp\left\{ \frac{1}{2} g T_t^k n^k \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} s \right\} e^{-\ell_t(s+i\varepsilon)} \right\}$$
$$- \frac{\hbar c}{32\pi^2} \sum_{\substack{k=1 \\ m_k \neq 0}}^{N} tr_c tr_\gamma \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-\left(\frac{m_k c}{\hbar}\right)^2 s} \left\{ e^{-\ell_t(s+i\varepsilon)} e^{\frac{1}{2} g T_t^k n^k \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} s} - 1 - \frac{s^2}{6} g^2 (T_t^k n^k)^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right\}$$
$$+ \text{const.}$$

wobei ζ_3 durch

$$Z_3 = 1 + \zeta_3 + \frac{g^2\hbar c}{48\pi^2}\, 11\, C(T_c)\left(\ln\frac{1}{\mu^2 s_0}\Big|_{s_0\to 0^+} + \frac{3}{2}\right)$$

$$- \frac{g^2\hbar c}{48\pi^2}\, 4\, C(t)\left\{N\left(\ln\frac{1}{\mu^2 s_0}\Big|_{s_0\to 0^+} + \frac{3}{2}\right) - \sum_{\substack{k=1\\ m_k\neq 0}}^{N}\left(\frac{3}{2} + \gamma + \ln\left[\left(\frac{m_k c}{\hbar}\right)^2/\mu\right.\right.\right. \tag{9.21}$$

definiert ist.

Bei der Herleitung von (9.20) und (9.21) verwendeten wir

$$\frac{d^2}{ds^2}\, e^{-\ell_c(s)}\Big|_{s=0} = -\frac{1}{6}\, g^2\, F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} (T_c^k n^k)^2 \,, \tag{9.22a}$$

$$\frac{d^2}{ds^2}\, e^{-\ell_t(s)}\Big|_{s=0} = -\frac{1}{6}\, g^2\, F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} (T_t^k n^k)^2 \,, \tag{9.22b}$$

$$\frac{d^2}{ds^2}\, e^{2ig\beta T_c^k n^k F s}\Big|_{s=0} = -\,4 g^2 F^2 (T_c^k n^k)^2 \,, \tag{9.22c}$$

$$\frac{d^2}{ds^2}\left\{ g T_c^k n^k F s \left[\cot(g T_c^k n^k F s) + i\right]\right\}\Big|_{s=0} = -\frac{2}{3}\, g^2 F^2 (T_c^k n^k)^2 \,, \tag{9.22d}$$

$$\frac{d^2}{ds^2}\, \exp\left\{\frac{1}{2}\, g T_t^k n^k \beta_{\mu\nu} F^{\mu\nu} s\right\}\Big|_{s=0} = \frac{1}{4}\, g^2 (T_t^k n^k)^2 (\beta_{\mu\nu} F^{\mu\nu})^2 \tag{9.22e}$$

und

$$tr_f\, (\beta_{\mu\nu} F^{\mu\nu})^2 = 8\, F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \,, \tag{9.23a}$$

$$tr_L\, F^2 = -\, F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \,, \tag{9.23b}$$

$$tr_c\, (T_c^i T_c^i) = C(T_c)\, \delta^{ii} \xrightarrow{su(n)} n\, \delta^{ii} \,, \tag{9.23c}$$

$$tr_c\, (T_t^i T_t^i) = C(t)\, \delta^{ii} \xrightarrow{su(n)} \frac{1}{2}\, \delta^{ii} \,, \tag{9.23d}$$

$$tr_L\, F = 0 \,, \quad tr_c\, T_c^i = 0 \,, \quad tr_c\, T_t^i = 0 \,. \tag{9.23e}$$

Nun benützen wir

$$tr_c\, tr_L \int_0^\infty ds\, \ln(\mu^2 s)\, \frac{d^3}{ds^3}\left\{ g T_c^k n^k F s \cot\left((s+i\varepsilon) g T_c^k n^k F\right)\right\} e^{-\ell_c (s+i\varepsilon)}$$

$$= 2 tr_c \int_0^\infty ds\, \frac{d}{ds}\left\{ \left(s \ln(\mu^2 s)\frac{d^3}{ds^3} - \frac{d^2}{ds^2}\right) e^{-\ell_c (s+i\varepsilon)}\right\} \qquad (9.24)$$

$$= \frac{1}{3} C(T_c) g^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} n^i n^i$$

und substituieren

$$s = \tau/\mu^2 \qquad (9.25)$$

in (9.20). Wir finden dann

$$\mathcal{L}^{eff}[A;\times] = \left(1 + \zeta_3 + \frac{g^2\hbar c}{48\pi^2}\frac{1}{2}\left(\ln\frac{k}{\xi}\right) C(T_c) + i\pi\lambda g^2 \hbar c \frac{11}{96\pi^2} C(T_c)\right) \frac{1}{2} n^i n^i (\vec{E}^2 - \vec{B}^2)$$

$$- \mu^4 \frac{\hbar c}{64\pi^2} tr_c \int_0^\infty d\tau\, \ln\tau$$

$$\frac{d^3}{d\tau^3}\left\{ \left\{ tr_L\, e^{2i\tau\beta T_c^k n^k g F/\mu^2} - 2 + \frac{i}{2}\ln\beta\; tr_L\, \tau\beta T_c^k n^k g F/\mu^2\right\} e^{-\ell_c\left(\frac{\tau+i\varepsilon}{\mu^2}\right)}\right\}$$

$$+ \mu^4 \frac{\hbar c}{64\pi^2} \sum_{k=1}^{N}{}_{m_k=0} tr_c\, tr_\gamma \int_0^\infty d\tau\, \ln\tau$$

$$\frac{d^3}{d\tau^3}\left\{ \exp\left\{ \tfrac{1}{2}\tau T_t^k n^k \delta_{\mu\nu} g F^{\mu\nu}/\mu^2\right\} e^{-\ell_t\left(\frac{\tau+i\varepsilon}{\mu^2}\right)}\right\}$$

$$- \mu^4 \frac{\hbar c}{32\pi^2} \sum_{k=1}^{N}{}_{m_k\neq 0} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau^3} e^{-\tau\left(\frac{m_k c}{\hbar\mu}\right)^2} \qquad (9.26)$$

$$tr_c\, tr_\gamma\left\{ \exp\left\{ \tfrac{1}{2}\tau T_t^k n^k \delta_{\mu\nu} g F^{\mu\nu}/\mu^2\right\} e^{-\ell_t\left(\frac{\tau+i\varepsilon}{\mu^2}\right)} - 1 - \frac{\tau^2}{6}\left(T_t^k n^k\right)^2 g^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}/\mu^4\right\}$$

$$+ \text{const.}$$

Die Berechnung der Spuren ergibt dann

$$\mathcal{L}^{\text{eff}}[A;x] = \Big(1+\zeta_3 + g^2\hbar c\,\frac{\ln\xi}{96\pi^2}\,C(T_c) + i\pi\lambda\, g^2\hbar c\,\frac{11}{96\pi^2}\,C(T_c)\Big)\tfrac{1}{2}n^i n^i\,(\vec{E}^2-\vec{B}^2)$$

$$- \frac{\mu^4\hbar c}{32\pi^2}\sum_{\ell}\int_0^\infty dr\,\ln r\,\frac{d^3}{dr^3}\Big(\Big\{e^{2ir|\hat{n}'_{c(\ell)}|gf^{(1)}/\mu^2} + e^{-2r|\hat{n}'_{c(\ell)}|gf^{(1)}/\mu^2} - 1$$

$$+ \tfrac{1}{2}\ln\xi\Big[ir|\hat{n}'_{c(\ell)}|gf^{(2)}/\mu^2 - r|\hat{n}'_{c(\ell)}|gf^{(1)}/\mu^2\Big]\Big\}$$

$$\frac{r\hat{n}'_{c(\ell)}gf^{(1)}/\mu^2}{\sinh\big((r+i\varepsilon)\hat{n}'_{c(\ell)}gf^{(1)}/\mu^2\big)}\;\frac{r\hat{n}'_{c(\ell)}gf^{(2)}/\mu^2}{\sin\big((r+i\varepsilon)\hat{n}'_{c(\ell)}gf^{(2)}/\mu^2\big)}\Big)$$

$$+ \frac{\mu^4\hbar c}{16\pi^2}\sum_{\substack{k=1\\ m_k=0}}^{N}\sum_{\ell}\int_0^\infty dr\,\ln r\,\frac{d^3}{dr^3}\Big(r\hat{n}'_{t(\ell)}\frac{gf^{(1)}}{\mu^2}\coth\big((r+i\varepsilon)\hat{n}'_{t(\ell)}\frac{gf^{(1)}}{\mu^2}\big)$$

$$r\hat{n}'_{t(\ell)}\frac{gf^{(2)}}{\mu^2}\cot\big((r+i\varepsilon)\hat{n}'_{t(\ell)}\frac{gf^{(2)}}{\mu^2}\big)\Big)$$

$$- \frac{\mu^4\hbar c}{8\pi^2}\sum_{\substack{k=1\\ m_k\neq 0}}^{N}\sum_{\ell}\int_0^\infty \frac{dr}{r^3}\,e^{-r\left(\frac{m_k c}{\mu\hbar}\right)^2}$$

$$\Big\{r\hat{n}'_{t(\ell)}\frac{gf^{(1)}}{\mu^2}\coth\big((r+i\varepsilon)\hat{n}'_{t(\ell)}\frac{gf^{(1)}}{\mu^2}\big)\,r\hat{n}'_{t(\ell)}\frac{gf^{(2)}}{\mu^2}\cot\big((r+i\varepsilon)\hat{n}'_{t(\ell)}\frac{gf^{(2)}}{\mu^2}\big)$$

$$-\tfrac{1}{3}r^2\big(\hat{n}'_{t(\ell)}\big)^2\Big\{\Big(\frac{gf^{(1)}}{\mu^2}\Big)^2-\Big(\frac{gf^{(2)}}{\mu^2}\Big)^2\Big\} - 1\Big\} \qquad (9.27)$$

Hierbei sind $\hat{n}'_{c(1)}$ und $\hat{n}'_{t(1)}$ die Eigenwerte der Matrizen

$$\hat{n}_c = n^k T_c^{\,k}, \qquad (9.28)$$

$$\hat{n}_t = n^k T_t^{\,k}. \qquad (9.29)$$

und

$$f^{(1)} = \left\{ \left\{ \mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2 \right\}^{1/2} + \mathcal{F} \right\}^{1/2} \geq 0 \qquad (9.30a)$$

$$f^{(2)} = \left\{ \left\{ \mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2 \right\}^{1/2} - \mathcal{F} \right\}^{1/2} \geq 0 \qquad (9.30b)$$

mit

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \left(\vec{B}^2 - \vec{E}^2 \right) \quad , \quad \mathcal{G}^2 = \left(\vec{E} \cdot \vec{B} \right)^2 \qquad (9.31)$$

Hier ist es nun praktisch einen Winkel φ durch

$$f^{(1)} = f \cos^2 \varphi \qquad (9.32a)$$

$$(f \geq 0)$$

$$f^{(2)} = f \sin^2 \varphi \qquad (9.32b)$$

einzuführen. Nach einigen Umformungen ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{eff}[A;x] = & \left(1 + \zeta_3 + \frac{g^2\hbar c}{48\pi^2}\left(11 C(T_c) - 4 N_0 C(t)\right) \ln \frac{gf}{\mu^2} \right. \\
& \left. + \frac{g^2\hbar c}{48\pi^2} C(T_c) \left[\frac{11}{2} i\pi\lambda + \frac{1}{2} \ln \xi^2 \right] + \frac{g^2\hbar c}{48\pi^2} P[n^i] \right) \frac{1}{2} n^i n^i \left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2 \right) \\
& - \frac{g^2\hbar c}{32\pi^2} f^2 C(T_c) \int_0^\infty dz \ln z \frac{d^3}{dz^3} \left[\left\{ e^{2iz\sin^2\varphi} + e^{-2iz\cos^2\varphi} - 1 \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{iz}{2} \ln \xi^2 \left[i\sin^2\varphi - \cos^2\varphi \right] \right\} \frac{z\cos^2\varphi}{\sinh(iz\cos^2\varphi)} \frac{z\sin^2\varphi}{\sin(iz\sin^2\varphi + i\varepsilon)} \right] \\
& + \frac{g^2\hbar c}{32\pi^2} f^2 2C(t) N_0 \int_0^\infty dz \ln z \frac{d^3}{dz^3} \left\{ iz\cos^2\varphi \coth(iz\cos^2\varphi) iz\sin^2\varphi \cot(iz\sin^2\varphi + i\varepsilon) \right\} \\
& - \frac{g^2\hbar c}{8\pi^2} f^2 \sum_{\substack{k=1 \\ m_k \neq 0}}^{N} \sum_{\ell} \left(\hat{n}'_{t(\ell)} \right)^2 \int_0^\infty \frac{dz}{z^3} \exp\left\{ -z \frac{\left(\frac{m_k c}{\hbar} \right)^2}{|\hat{n}'_{t(\ell)}| g f} \right\} \qquad (9.33) \\
& \left\{ iz\cos^2\varphi \coth(iz\cos^2\varphi) iz\sin^2\varphi \cot(iz\sin^2\varphi + i\varepsilon) \right. \\
& \left. - \frac{1}{3} z^2 (\cos^2\varphi - \sin^4\varphi) - 1 \right\} \\
& + \text{const.}
\end{aligned}$$

mit

$$P[n^i] = \frac{11}{2}\, tr_c\left\{(n^k T_c^k)^2 \ln (n^k T_c^k)^2\right\} - 2N_o\, tr_c\left\{(n^k T_t^k)^2 \ln (n^k T_t^k)^2\right\}$$

$$= 11 \sum_\ell (\hat{n}'_{c(\ell)})^2 \ln|\hat{n}'_{c(\ell)}| - 4N_o \sum_\ell (\hat{n}'_{t(\ell)})^2 \ln|\hat{n}'_{t(\ell)}| \qquad (9.34)$$

In (9.33) und (9.34) bezeichnet N_o die Anzahl der masselosen Quarks. Solange wir uns in einem mittleren Energiebereich aufhalten, indem das "charmed" Quark und das "bottom" Quark noch vernachlässigbar kleine Beiträge zu (9.33) liefern, und indem die Massen des "up" Quarks und des "down" Quarks als vernachlässigbar klein behandelt werden dürfen, erhalten wir näherungsweise

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{eff}[A^i_\mu; x] = {} & \left(1 + \zeta_3 + \frac{g^2\hbar c}{48\pi^2}\left(11C(T_c) - 4N^{eff}C(t)\right)\ln\frac{gf}{\mu^2}\right. \\ & \left. + \frac{g^2\hbar c}{96\pi^2}\, C(T_c)\left[11i\pi\lambda + \ln\tfrac{k}{\xi}\right] + \frac{g^2\hbar c}{48\pi^2}\, P^{eff}[n^i]\right)\frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \\ & - \frac{g^2\hbar c}{32\pi^2}\, f^2 C(T_c)\int_0^\infty dz \ln z \frac{d^3}{dz^3}\left\{\left\{e^{2iz\sin^2\varphi} + e^{-2z\cos^2\varphi} - 1\right.\right. \\ & \left.\left. + \frac{z}{2}\ln\tfrac{k}{\xi}\left[i\sin^2\varphi - \cos^2\varphi\right]\right\}\frac{z\cos^2\varphi}{\sinh(z\cos^2\varphi)}\,\frac{z\sin^2\varphi}{\sin(z\sin^2\varphi + i\varepsilon)}\right) \\ & + \frac{g^2\hbar c}{32\pi^2}\, f^2\, 2C(t)N^{eff}\int_0^\infty dz \ln z \frac{d^3}{dz^3}\left\{z\cos^2\varphi\coth(z\cos^2\varphi)\, z\sin^2\varphi\cot(z\sin^2\varphi + i\varepsilon)\right. \\ & + const. \end{aligned} \qquad (9.35)$$

mit

$$P^{eff}[n^i] = \frac{11}{2}\, tr_c\left\{(n^k T_c^k)^2 \ln (n^k T_c^k)^2\right\} - 2N^{eff}\, tr_c\left\{(n^k T_t^k)^2 \ln (n^k T_t^k)^2\right\} \qquad (9.36)$$

Hierbei ist

$$2 \leq N^{eff} \leq 3 \quad ; \tag{9.37}$$

und

$$C(t) = \frac{1}{2} \quad , \tag{9.38a}$$

$$C(T_c) = \mathcal{N} \quad , \tag{9.38b}$$

falls die Eichgruppe die SU($\mathcal{N}$) ist. Speziell

$$C(T_c) = 3 \qquad \text{für die SU(3)} \tag{9.38c}$$

Für den Spezialfall eines reinen colour-elektrischen oder colour-magnetischen Feldes sind die Integrale in (9.35) leicht zu berechnen. Es ergibt sich dann

$$\mathcal{L}^{eff}[n^i \vec{E}] = \frac{1}{2}\vec{E}^2\Big(1 + \frac{g^2\hbar c}{48\pi^2}\Big\{(11\mathcal{N} - 2N^{eff})\ln\frac{gE}{\mu^2} + P^{eff}[n^i] + \kappa\Big\} - i\frac{\pi}{2}\frac{g^2\hbar c}{48\pi^2}\big(11\mathcal{N}(1-\lambda) - 2N^{eff}\big)\Big) + const. \tag{9.39}$$

$$\mathcal{L}^{eff}[n^i \vec{B}] = -\frac{1}{2}\vec{B}^2\Big(1 + \frac{g\hbar c}{48\pi^2}\Big\{(11\mathcal{N} - 2N^{eff})\ln\frac{gB}{\mu^2} + P^{eff}[n^i] + \kappa\Big\} - i\frac{\pi}{2}\frac{g^2\hbar c}{48\pi^2}\,11\mathcal{N}\cdot(-\lambda)\Big) + const. \tag{9.40}$$

Hierbei ist κ eine reelle, frei wählbare Konstante.

Mit (9.35) bzw. (9.39) und (9.40) haben wir einen kompakten Ausdruck für die effektive Wirkung in kovariant-konstanten Colour-Feldern gefunden. Allerdings ist der Imaginärteil der effektiven Wirkung durch diese Formeln noch nicht eindeutig festgelegt, da wir noch eine Wahl zwischen verschiedenen Werten des Parameters λ haben. (Vgl. (4.21a-c).) Wir verdanken es hier sehr glücklichen Umständen, daß wir λ überhaupt etwas näher bestimmen können. Betrachten wir nämlich den Imaginärteil von (9.39) und (9.40), so erkennen wir, daß er nur Beiträge enthält, die quadratisch in der Kopplungskonstanten g sind. Dies liegt daran, daß die Gluonen masselose Teilchen sind, und daß wir auch die Quarkmassen in (9.39), (9.40) vernachlässigt worden sind. Um den exakten Imaginärteil der Ein-Loop effektiven Wirkung zu bestimmen, genügt es deshalb nach dem Imaginärteil der Ein-Loop effektiven Wirkung bis zur Ordnung g^2 zu schauen. Um den Parameter λ zu bestimmen, reicht es aus, nur die Beiträge der Gluonen in betracht zu ziehen. Nun haben wir den Imaginärteil der Ein-Loop effektiven Wirkung bis zur Ordnung g^2 schon in Kapitel 3 bestimmt. Um den exakten Imaginärteil der Ein-Loop effektiven Wirkung für konstante Felder zu erhalten, brauchen wir deshalb lediglich konstante Felder in die Formel (3.24) einzusetzen.

Benützen wir also

$$|\vec{E}^i(k)|^2 = (n^i)^2 \vec{E}^2 \delta(k) \int d^4x\, e^{-ikx} = \int d^4x\, \vec{E}^2 \delta(k) \qquad (9.41a)$$

für ein kovariant-konstantes colour-elektrisches Feld und

$$|B^i(k)|^2 = (n^i)^2\ \vec{B}^2\ \delta(k) \int d^4x\, e^{-ikx} = \int d^4x\ \vec{B}^2\ \delta(k) \qquad (9.41b)$$

für ein kovariant-konstantes colour-magnetisches Feld in (3.24), so erhalten wir für den Imaginärteil der Ein-Loop effektiven Wirkung

$$\mathrm{Im}\,\tilde{\Gamma}[n^i\vec{E}] = \int d^4x\ \tfrac{1}{2}\vec{E}^2\ \frac{11}{48\pi^2}\,\mathcal{N}\,g^2\hbar c(-\pi)\int d^4k\,\delta(k)\,\theta(k_o^2-\vec{k}^2) \qquad (9.42a)$$

und

$$\mathrm{Im}\,\tilde{\Gamma}[n^i\vec{B}] = \int d^4x\ \tfrac{-1}{2}\vec{B}^2\ \frac{11}{48\pi^2}\,\mathcal{N}\,g^2\hbar c(-\pi)\int d^4k\,\delta(k)\,\theta(k_o^2-\vec{k}^2) \qquad (9.42b)$$

Dies ergibt für den Imaginärteil der effektiven Lagrangedichte

$$\mathrm{Im}\,\mathcal{L}^{eff}[n^i\vec{E}] = -\tfrac{1}{2}\vec{E}^2\ \frac{g^2\hbar c}{48\pi}\ 11\,\mathcal{N}\ \mathcal{J} \qquad (9.43)$$

und

$$\mathrm{Im}\,\mathcal{L}^{eff}[n^i\vec{B}] = +\tfrac{1}{2}\vec{B}^2\ \frac{g^2\hbar c}{48\pi}\ 11\,\mathcal{N}\ \mathcal{J} \qquad (9.44)$$

wobei

$$\mathcal{J} = \int d^4k\ \delta(k)\,\theta(k_o^2-\vec{k}^2)\ . \qquad (9.45)$$

Die Gleichungen (9.43), (9.44) haben den großen Nachteil, daß wir den genauen Wert von $\mathcal{J}$ nicht kennen, da $\mathcal{J}$ durch (9.45) mathematisch nicht genau definiert ist. (9.45) kann jeden Wert zwischen 0 und 1 annehmen.
Um $\mathcal{J}$ genauer zu bestimmen, betrachten wir die Verhältnisse in der QED.

Zu diesem Zwecke setzen wir

$$|\vec{E}^2(k)| = \int d^4x\, \vec{E}^2\, \delta(k)$$

für konstante elektrische Felder, und

$$|\vec{B}^2(k)| = \int d^4x\, \vec{B}^2\, \delta(k)$$

für konstante magnetische Felder in (3.25). Dies ergibt diesmal

$$\mathrm{Im}\, \mathcal{L}_{QED}^{eff}[\vec{E}] = \frac{1}{2}\vec{E}^2\, \frac{\alpha}{3}\, \mathcal{J}_{QED} \qquad (9.46a)$$

für ein elektrisches Feld und

$$\mathrm{Im}\, \mathcal{L}_{QED}^{eff}[\vec{B}] = -\frac{1}{2}\vec{B}^2\, \frac{\alpha}{3}\, \mathcal{J}_{QED} \qquad (9.46b)$$

für ein magnetisches Feld. Hierbei ist

$$\mathcal{J}_{QED} = \int d^4k\, \delta(k)\, \theta(k_0^2 - \vec{k}^2) \qquad (9.47)$$

formal gleich wie $\mathcal{J}$ in (9.45).

Andererseits wissen wir von Schwinger[21], daß

$$\mathrm{Im}\, \mathcal{L}_{QED}^{eff}[\vec{E}] = \frac{1}{2}\vec{E}^2\, \frac{\alpha}{6} \qquad (9.48a)$$

und

$$\mathrm{Im}\, \mathcal{L}_{QED}^{eff}[\vec{B}] = 0 \,. \qquad (9.48b)$$

Vergleichen wir (9.46a) mit (9.48a) und (9.46b) mit (9.48b), so folgt

$$\mathcal{J}_{QED} = \frac{1}{2} \qquad \text{für ein elektrisches Feld} \qquad (9.49a)$$

$$\mathcal{J}_{QED} = 0 \qquad \text{für ein magnetisches Feld} \qquad (9.49b)$$

Da ein kovariant-konstantes Colour-Feld

$$G^i_{\mu\nu} = n^i F_{\mu\nu} = n^i (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \qquad (9.50)$$

bis auf den unwesentlichen konstanten Colour-Vektor n^i mit einem konstanten elektromagnetischen Feld

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \qquad (9.51)$$

identisch ist, ist es naheliegend, (9.49a,b) auf (9.47) zu übertragen. Also

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} \qquad \text{für ein kovariant-konstantes colour-elektrisches Feld ;} \qquad (9.52a)$$

$$\mathcal{J} = 0 \qquad \text{für ein kovariant-konstantes colour-magnetisches Feld .} \qquad (9.52b)$$

Wir haben also den richtigen Wert von $\mathcal{J}$ durch eine Verallgemeinerung der Ergebnisse der QED gewonnen. Solch eine Verallgemeinerung muß nicht unbedingt richtig sein. In dem vorliegenden Fall ist es jedoch so, daß man den richtigen Wert von $\mathcal{J}_{QED}$ in (9.46a) und (9.46b) bzw. $\mathcal{J}$ in (9.43) und (9.44) durch eine sorgfältige Betrachtung des Grenzwertes von konstanten Feldern in (3.25) bzw. (3.24) erhält. Da die Felder (9.50) und (9.51) bis auf einen hier unwesentlichen Colour-Vektor n^i gleich sind,

wird der Übergang zu konstanten Feldern in (3.24) auf die gleiche Weise wie in (3.25) durchgeführt werden ; und somit sollte man für (9.49a,b) die gleichen Werte wie für (9.52a,b) erhalten .

Dies ergibt nun insgesamt

$$\mathcal{I}m\,\mathcal{L}^{eff}[n\cdot\vec{E}] = -\frac{1}{2}\vec{E}^2\,\frac{g^2\hbar c}{96\pi}\,11\mathcal{N} \quad , \tag{9.53}$$

$$\mathcal{I}m\,\mathcal{L}^{eff}[n\cdot\vec{B}] = 0 \quad . \tag{9.54}$$

Vergleichen wir diese Gleichungen mit (9.39) , (9.40) , so erkennen wir , daß

$$\lambda = 0 \tag{9.55}$$

gelten muß . Wir haben diesen Wert insbesondere in (6.25) , (9.11) und (9.35) einzusetzen .

10. Zusammenfassung der Ergebnisse für die effektive Lagrangedichte in kovariant-konstanten Colour-Feldern, Diskussion

Zusammengefaßt haben wir folgende Ergebnisse für die effektive Lagrangedichte in kovariant-konstanten Colour-Feldern gefunden.

$$\mathcal{L}^{eff}[n^i F^{\mu\nu}] = \left\{1 + \zeta_3 + \frac{g^2\hbar c}{48\pi^2}\left(11C(T_c) - 4N^{eff}C(t)\right)\ln\frac{gf}{\mu^2} + \frac{g^2\hbar c}{48\pi^2}P^{eff}[n^i]\right\}\frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) + \frac{g^2\hbar c}{32\pi^2}\left\{C(T_c)\left(\Phi_1(\varphi) + \ln\frac{f}{\mu}\Phi_2(\varphi)\right) - N^{eff}C(t)\Phi_3(\varphi)\right\}f^2 + const. \tag{10.1}$$

mit

$$\Phi_1(\varphi) = -\int_0^\infty dz\,\ln z\,\frac{d^3}{dz^3}\left[\left\{e^{2iz\sin^2\varphi} + e^{-2iz\cos^2\varphi} - 1\right\}\frac{z\cos^2\varphi}{\sinh(z\cos^2\varphi)}\,\frac{z\sin^2\varphi}{\sin(z\sin^2\varphi + i\varepsilon)}\right], \tag{10.2a}$$

$$\Phi_2(\varphi) = -\frac{1}{i}\int_0^\infty dz\,\ln z\,\frac{d^3}{dz^3}\left[z\left[i\sin^2\varphi - \cos^2\varphi\right]\frac{z\cos^2\varphi}{\sinh(z\cos^2\varphi)}\,\frac{z\sin^2\varphi}{\sin(z\sin^2\varphi + i\varepsilon)}\right] + \frac{1}{6}(\sin^4\varphi - \cos^4\varphi), \tag{10.2b}$$

$$\Phi_3(\varphi) = -2\int_0^\infty dz\,\ln z\,\frac{d^3}{dz^3}\left\{z\cos^2\varphi\coth(z\cos^2\varphi)\,z\sin^2\varphi\cot(z\sin^2\varphi + i\varepsilon)\right\}; \tag{10.2c}$$

$$P^{eff}[n^i] = 11\sum_l (\hat{n}^1_{c(l)})^2 \ln|\hat{n}^1_{c(l)}| - N^{eff}\sum_l (\hat{n}^1_{t(l)})^2 \ln|\hat{n}^1_{t(l)}| \tag{10.3}$$

wobei $\hat{n}^1_{c(l)}$ und $\hat{n}^1_{t(l)}$ die Eigenwerte der Matrizen

$$\hat{n}_c = n^i T_c^i \quad , \quad \hat{n}_t = n^i T_t \tag{10.4}$$

sind. (Vgl. (1.75a,b).)

Hierbei sind die Größen f und φ durch

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= f\cos^2\varphi \\ f^{(2)} &= f\sin^2\varphi \end{aligned} \qquad (f\geq 0,\ 0\leq\varphi\leq\tfrac{\pi}{2}) \tag{10.5a}$$

mit

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= \left\{ \left\{\mathcal{F}^2+\mathcal{G}^2\right\}^{1/2} + \mathcal{F} \right\}^{1/2} \geq 0\,, \\ f^{(2)} &= \left\{ \left\{\mathcal{F}^2+\mathcal{G}^2\right\}^{1/2} - \mathcal{F} \right\}^{1/2} \geq 0 \end{aligned} \tag{10.5b}$$

wobei

$$\mathcal{F} = \tfrac{1}{2}\left(\vec{B}^2-\vec{E}^2\right)\,,\quad \mathcal{G}^2 = (\vec{E}\cdot\vec{B})^2 \tag{10.5c}$$

definiert. f ist also ein Maß für die Feldstärke und φ steht für die spezielle Feldkonfiguration.

n^i gibt die Richtung im Colourraum an.

Die Konstanten $C(T_c)$ und $C(t)$ sind durch (1.73), (1.74) definiert und für den Spezialfall der SU($\mathcal{N}$) als Eichgruppe gilt.

$$C(T_c) = \mathcal{N} \tag{10.6a}$$

$$C(t) = \frac{1}{2} \tag{10.6b}$$

Wenn wir die SU(2) als Eichgruppe wählen, so folgt mit (1.81c), (1.81e):

$$p^{\text{eff}}[n^i] = N^{\text{eff}}\cdot\frac{\ln 2}{2} \tag{10.7}$$

und für die SU(3) sind die Eigenwerte der Matrizen (10.4) durch (1.86d,e) gegeben.

N^{eff} ist die Anzahl der Flavours.

ζ_3 ist eine beliebige reelle Zahl. Es ist mit Z_3 durch

$$Z_3 = 1 + \zeta_3 + \frac{g^2\hbar c}{48\pi^2}\left(11\,C(T_c) - 4\,C(t)N^{eff}\right)\left(\frac{3}{2} + \ln\frac{1}{\mu^2 s_0}\Big|_{s_0\to 0^+}\right) \tag{10.8}$$

verknüpft.

Für ein reines colour-elektrisches Feld ergibt sich

$$\mathcal{L}^{eff}[n^i\vec{E}] = \frac{1}{2}\vec{E}^2\left(1 + \frac{g^2\hbar c}{48\pi^2}\left\{(11\mathcal{N} - 2N^{eff})\left(\ln\frac{gE}{\mu^2} - i\frac{\pi}{2}\right) + P^{eff}[n^i] + \kappa\right\}\right) + \text{const.} \quad ; \tag{10.9}$$

und für ein reines colour-magnetisches Feld finden wir

$$\mathcal{L}^{eff}[n^i\vec{B}] = -\frac{1}{2}\vec{B}^2\left(1 + \frac{g^2\hbar c}{48\pi^2}\left\{(11\mathcal{N} - 2N^{eff})\ln\frac{gB}{\mu^2} + P^{eff}[n^i] + \kappa\right\}\right) + \text{const.} \tag{10.10}$$

Hierbei haben wir die SU($\mathcal{N}$) als Eichgruppe gewählt.
Auf den Zusammenhang zwischen der reellen Konstanten κ und ζ_3 wollen wir hier nicht eingehen, weil es uns keine physikalische Aussagen liefert.
Mit Hilfe von (2.62) können wir aus (10.9), (10.10) das effektive Potential für ein reines colour-elektrisches und ein reines colour-magnetisches Feld herleiten. Wählen wir eine feste Richtung im Colour-Raum

$$n^i = \text{const.} ,$$

so ergibt sich [7],[8],[9],[27]

$$V^{eff}[n;\vec{E}] = \frac{1}{2}\vec{E}^2\left(1 + \frac{g^2\hbar c}{48\pi^2}\left\{(11\mathcal{N} - 2N^{eff})\left(\ln\frac{gE}{\mu^2} + 1 - i\frac{\pi}{2}\right) + \tilde{\kappa}\right\}\right) + \text{const.} \qquad (10.11)$$

$$V^{eff}[n;\vec{B}] = \frac{1}{2}\vec{B}^2\left(1 + \frac{g^2\hbar c}{48\pi^2}\left\{(11\mathcal{N} - 2N^{eff})\ln\frac{gB}{\mu^2} + \tilde{\kappa}\right\}\right) + \text{const.} \qquad (10.12)$$

für das effektive Potential. Hierbei ist $\tilde{\kappa}$ eine beliebige reelle Konstante.

Nehmen wir

$$N^{eff} < \frac{11\cdot\mathcal{N}}{2} \qquad (10.13)$$

an, so hat das effektive Potential den in Fig. 8 skizzierten Verlauf.

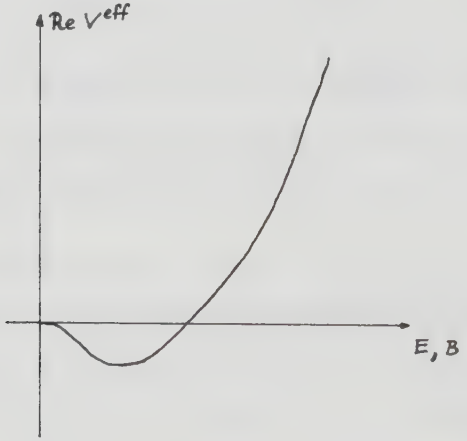

Fig. 8

Das effektive Potential besitzt also ein Minimum für eine nichtverschwindende Feldstärke.

In (10.1) bis (10.12) haben wir die wichtigsten Ergebnisse bezüglich der effektiven Lagrangedichte und dem effektiven Potential in einem kovariant-konstanten Colour-Feld zusammengestellt. Wir müssen uns nun noch fragen, inwiefern diese Resultate physikalisch sinnvoll und anwendbar sind. Gehen wir davon aus, daß die Confinement-Hypothese stimmt, so kann es keine konstanten Colour-Felder geben. Somit wäre es physikalisch sinnlos, die effektive Lagrangedichte (bzw. das effektive Potential) in einem exakt kovariant-konstanten Colour-Feld zu studieren. Betrachten wir jedoch ein Colour-Feld, das in einem ausgedehnten, aber begrenzten Raumbereich als ungefähr kovariant-konstant angesehen werden kann, so ist es naheliegend zu vermuten, daß wir in dem betreffenden Raumbereich die effektive Lagrangedichte durch die effektive Lagrangedichte eines kovariant-konstanten Colour-Feldes approximieren können. Wir versuchen also vom Fall des unendlich ausgedehnten kovariant-konstanten Colour-Feldes zum Fall eines Colour-Feldes, das in einem ausgedehnten, aber begrenzten Raumbereich ungefähr kovariant-konstant ist, zu extrapolieren. Beim genaueren Hinsehen stellt sich dieses Verfahren als physikalisch unzulänglich heraus. Denn man berechnet zunächst die effektive Lagrangedichte für die kovariant-konstante Feldkonfiguration, die nicht einmal theoretisch realisierbar ist – dies verbietet die Confinement-Hypothese – und versucht dann zu einer physikalischen Situation zu extrapolieren. Man darf dann nach solch einer Extrapolation von einer unphysikalischen Situation zu einer physika-

lischen Situation nicht mehr erwarten, daß das so erhaltene Resultat noch in irgend einer Weise physikalisch akzeptabel ist. Die in (10.1) bis (10.12) aufgeführten Resultate sollten deshalb nicht zur Beschreibung der Natur des QCD-Vakuums herangezogen werden, sondern vielmehr als Durchgangsstadium auf der Suche nach dem wahren QCD Vakuum.

11. Die effektive Wirkung bei endlicher Temperatur

In diesem Kapitel wollen wir nun die effektive Wirkung bei endlicher Temperatur berechnen. Folgen wir hierbei [28] oder [10], so erhalten wir die Theorie bei endlicher Temperatur aus der Theorie bei T=0 durch die Substitution

$$\Delta_+^{Y.M.}[A_\mu^i](x-x') \longrightarrow \Delta_+^{Y.M.}[A_\mu^i, T](x-x')$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Delta_+^{Y.M.}[A_\mu^i](x^0-x^{0\prime}-in\beta_T, \vec{x}-\vec{x}') \tag{11.1}$$

$$\Delta_+^{F.P.}[A_\mu^i](x-x') \longrightarrow \Delta_+^{F.P.}[A_\mu^i, T](x-x')$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Delta_+^{F.P.}[A_\mu^i](x^0-x^{0\prime}-in\beta_T, \vec{x}-\vec{x}') \tag{11.2}$$

$$G_+[m|A_\mu^i](x-x') \longrightarrow G_+[m|A_\mu^i, T](x-x')$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n G_+[m|A_\mu^i](x^0-x^{0\prime}-in\beta_T, \vec{x}-\vec{x}') \tag{11.3}$$

mit

$$\beta_T = \frac{\hbar c}{kT} \tag{11.4}$$

Diese Methode ist natürlich nur dann anwendbar, wenn die Greenschen Funktionen bei T=0 gegen Zeittranslationen invariant sind. Wir wollen hier jedoch nur kovariant-konstante Colour--Felder betrachten, und dann ist solch eine Substitution immer möglich. Ob die damit erhaltenen Resultate auch physikalisch sinnvoll sind, ist eine andere Frage, die wir jetzt noch nicht diskutieren wollen.

Wir wollen hier nur die effektive Wirkung in einem reinen colour-magnetischen Feld betrachten. Ferner interessiert uns hier nur der Beitrag der Gluonen zur effektiven Wirkung. Setzen wir (11.1), (11.2) in (3.16) ein, so erhalten wir

$$\tilde{\Gamma}[A,T] = Z_3\, S^{cl}[A]$$
$$+ \frac{i}{2}\hbar c \int d^4x\, tr_c\, tr_L \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\ln\left(\Delta_+^{Y.M.}[A]\right)^{-1}\right](x^\circ - x^\circ - in\beta_T, \vec{x}-\vec{x})$$
$$- i\hbar c \int d^4x\, tr_c\, tr_L \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\ln\left(\Delta_+^{F.P.}[A]\right)^{-1}\right](x^\circ - x^\circ - in\beta_T, \vec{x}-\vec{x})$$
$$+ const. \qquad (x^\circ \to -ix_4) \qquad (11.5)$$

Der Einfachheit halber berechnen wir (11.5) nur in der Feynman-Eichung; es ergbt sich dann aus (9.12) für die effektive Lagrangedichte

$$\mathcal{L}^{eff}[A,T] = \mathcal{L}^{eff}[A, T=0]$$
$$+ \frac{1}{2}\hbar c\, tr_c\, tr_L \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \int_{\tilde{\Gamma}_n^+} \frac{ds}{s}\, \frac{1+\beta}{2}\, \Delta_+^{Y.M.}[A_\mu^i](s; x^\circ - x^\circ - in\beta_T, \vec{x}-\vec{x})$$
$$+ \frac{1}{2}\hbar c\, tr_c\, tr_L \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \int_{\tilde{\Gamma}_c^+} \frac{ds}{s}\, \frac{1-\beta}{2}\, \Delta_+^{Y.M.}[A_\mu^i](s; x^\circ - x^\circ - in\beta_T, \vec{x}-\vec{x})$$
$$- \frac{1}{2}\hbar c\, tr_c \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \int_{\tilde{\Gamma}_n^+} \frac{ds}{s}\, \Delta_+^{F.P.}[A_\mu^i](s; x^\circ - x^\circ - in\beta_T, \vec{x}-\vec{x})$$
$$- \frac{1}{2}\hbar c\, tr_c \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \int_{\tilde{\Gamma}_c^+} \frac{ds}{s}\, \Delta_+^{F.P.}[A_\mu^i](s; x^\circ - x^\circ - in\beta_T, \vec{x}-\vec{x}) \qquad (11.6)$$

Verfahren wir nun wie bei der Herleitung von (9.14), so erhalten

wir (für ein reines colour-magnetisches Feld) :

$$\mathcal{L}^{eff}[n^i\vec{B},T] = \mathcal{L}^{eff}[n^i\vec{B},T=0]$$

$$+ \frac{\hbar c}{32\pi^2} tr_c\, tr_L \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \int_{\tilde{\Gamma}_\tau^+} \frac{ds}{s^3} e^{-\frac{n^2\beta_T^2}{4s}} e^{2igT_c^k n^k F s} e^{-\ell_c(s)} \frac{1+\beta}{2}$$

$$+ \frac{\hbar c}{32\pi^2} tr_c\, tr_L \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \int_{\tilde{\Gamma}_\ell^+} \frac{ds}{s^3} e^{-\frac{n^2\beta_T^2}{4s}} e^{2igT_c^k n^k F s} e^{-\ell_c(s)} \frac{1-\beta}{2}$$

$$- \frac{\hbar c}{32\pi^2} tr_c \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \left\{ \int_{\tilde{\Gamma}_\tau^+} \frac{ds}{s^3} e^{-\frac{n^2\beta_T^2}{4s}} e^{-\ell_c(s)} + \int_{\tilde{\Gamma}_\ell^+} \frac{ds}{s^3} e^{-\frac{n^2\beta_T^2}{4s}} e^{-\ell_c(s)} \right\} \qquad (11.7)$$

Folgen wir den Überlegungen von Kapitel 9 , so finden wir

$$\mathcal{L}^{eff}[n^i\vec{B},T] = \mathcal{L}^{eff}[n^i\vec{B},T=0]$$

$$+ \frac{c\hbar}{32\pi^2} \sum_\ell \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \left\{ \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-\frac{n^2\beta_T^2}{4s}} \frac{|\hat{n}'_{c(\ell)}|gBs}{\sinh(|\hat{n}'_{c(\ell)}|gBs)} e^{-2|\hat{n}'_{c(\ell)}|gBs} \right.$$

$$\left. + \int_{\tilde{\Gamma}_\ell^+} \frac{ds}{s^3} e^{-\frac{n^2\beta_T^2}{4s}} \frac{|\hat{n}'_{c(\ell)}|gBs}{\sinh(|\hat{n}'_{c(\ell)}|gBs)} e^{+2|\hat{n}'_{c(\ell)}|gBs} \right\} \qquad (11.8)$$

Hierbei sind die $\hat{n}'_{c(l)}$ die Eigenwerte der Matrix $n^k T_c^k$. (Vgl. (1.75b) .)

Dieses Ergebnis können wir auch als

$$\mathcal{L}^{eff}[n^i\vec{B},T] = \mathcal{L}^{eff}[n^i\vec{B},T=0] + \frac{\pi^2\hbar c}{45\beta_T^4} \sum_{\ell\ \hat{n}'_{c(\ell)}=0} 1$$

$$+ \frac{g^2\hbar c}{16\pi^2} \vec{B}^2 \sum_{\ell\ \hat{n}'_{c(\ell)}\neq 0} (\hat{n}'_{c(\ell)})^2 \left\{ \mathcal{K}(\alpha_k^2) + \frac{1+\lambda}{2}\tilde{\mathcal{K}}(\alpha_k^2) + \frac{1-\lambda}{2}\tilde{\mathcal{K}}^*(\alpha_k^2) \right\} \qquad (11.9)$$

mit

$$\mathcal{K}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{dz}{z^3} e^{-\frac{xn^2}{z}} \frac{z}{\sinh z} e^{-2z} , \tag{11.10}$$

$$\tilde{\mathcal{K}}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\tilde{\mathcal{R}}_{\varepsilon,I}^{+}} \frac{dz}{z^3} e^{-\frac{xn^2}{z}} \frac{z}{\sinh z} e^{2z} \tag{11.11}$$

und

$$\alpha_k^2 = |\hat{n}'_{e(c)}| g B \beta_T^2 / 4 \tag{11.12}$$

schreiben.

Für $\tilde{\mathcal{K}}(x)$ läßt sich durch analytische Fortsetzung zeigen, daß

$$\tilde{\mathcal{K}}(x) = \mathcal{K}(x e^{i\pi}) \quad , x > 0 \tag{11.13}$$

gilt. Es genügt also $\mathcal{K}(x)$ zu berechnen.

Es ergibt sich dann

$$\mathcal{K}(x) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{2\nu+1}{xn^2}\right)^{\frac{1}{2}} K_1\left(2n\sqrt{x(2\nu+1)}\right) , \tag{11.14}$$

$$\tilde{\mathcal{K}}(x) = -\lim_{\varepsilon \to 0^+} 4i \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{2\nu+1}{xn^2}\right)^{1/2} K_1\left(2in\sqrt{2\nu+1}(\sqrt{x} - i\varepsilon)\right) . \tag{11.15}$$

Für große x gilt dann

$$\mathcal{K}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \sqrt[4]{\frac{48\pi^2}{x^3}} e^{-\sqrt{12x}} , \tag{11.16}$$

$$\tilde{\mathcal{K}}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \sqrt[4]{\frac{48\pi^2}{x^3}} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{2\nu+1}{3n^6}\right)^{1/4} \exp\left\{-i\left[2n\sqrt{2\nu+1}(\sqrt{x} - i\varepsilon) + \frac{3}{4}\pi\right]\right\} \tag{11.17}$$

Nun wollen wir (11.1o), (11.11) auch noch für kleine x studieren. Dazu bringen wir (11.10) in die Form

$$\mathcal{K}(x) = \frac{\pi^4}{90x^2} - \frac{\pi^2}{3x} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{dz}{z^3} e^{-\frac{xn^2}{z}} \left\{ \frac{2z e^{-3z}}{1-e^{-2z}} - 1 + 2z \right\} \tag{11.18}$$

und benützen dann

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-an^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\pi^2 m^2/a} \right). \tag{11.19}$$

Dies ergibt nach einigen Umformungen

$$\mathcal{K}(x) = \frac{\pi^4}{90x^2} - \frac{\pi^2}{3x} + f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) \tag{11.20}$$

mit

$$f_1(x) = \int_0^{\infty} \frac{dz}{z^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi z}{x}}\, e^{-\frac{\pi^2 m^2 z}{x}} \left\{ 2z e^{-3z}/(1-e^{-2z}) - 1 + 2z - \frac{11}{6} z^2 \right\}, \tag{11.21}$$

$$f_2(x) = \int_0^{\infty} \frac{dz}{z^3} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi z}{x}} \left\{ 2z e^{-3z}/(1-e^{-2z}) - 1 + 2z \right\}, \tag{11.22}$$

$$f_3(x) = \int_0^{\infty} \frac{dz}{z^3} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi z}{x}}\, e^{-\frac{\pi^2 m^2 z}{x}} \frac{11}{6} z^2 - \frac{1}{2} \left\{ \frac{2z e^{-3z}}{1-e^{-2z}} - 1 + 2z \right\} \right\}. \tag{11.23}$$

Um $f_1(x)$ auszuwerten benützen wir

$$\frac{2z e^{-3z}}{1-e^{-2z}} - 1 + 2z - \frac{11}{6} z^2 = \sum_{k=3}^{n} B_k\left(\tfrac{3}{2}\right)(-2z)^k/k! + z^{n+1} r(z). \qquad n > 2 \tag{11.24}$$

Hierbei sind die $B_k(x)$ die Bernoulli-Polynome und $r(x)$ ist eine beschränkte Funktion für $0 \leq z \leq \infty$.

Dies ergibt

$$f_1(x) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{n} B_{k+2}\left(\tfrac{3}{2}\right) \zeta(2k+1)\, \Gamma\left(k+\tfrac{1}{2}\right) \frac{\left(-2x/\pi^2\right)^k}{(k+2)!} + O(x^{n+1}). \tag{11.25}$$

Weiterhin folgt

$$f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} C_1 \tag{11.26a}$$

mit

$$C_1 = f_2(1) \cong 5{,}742 \tag{11.26b}$$

und

$$f_3(x) = C_2 + \frac{11}{12} \ln x \tag{11.27a}$$

mit der reellen Konstanten

$$C_2 = f_3(1) \in \mathbb{R}\,. \tag{11.27b}$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\mathcal{K}(x) = \frac{\pi^4}{90x^2} - \frac{\pi^2}{3x} + \frac{C_1}{\sqrt{x}} + \frac{11}{12} \ln x + C_2 + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+2)!} B_{k+2}\left(\tfrac{3}{2}\right) \zeta(2k+1)\, \Gamma\left(k+\tfrac{1}{2}\right) \left(\frac{-2x}{\pi^2}\right)^k + O(x^{n+1}), \tag{11.28a}$$

$$\tilde{\mathcal{K}}(x) = \frac{\pi^4}{90x^2} + \frac{\pi^2}{3x} - i\frac{C_1}{\sqrt{x}} + \frac{11}{12}(\ln x + i\pi) + C_2 + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+2)!} B_{k+2}\left(\tfrac{3}{2}\right) \zeta(2k+1)\, \Gamma\left(k+\tfrac{1}{2}\right) \left(\frac{2x}{\pi^2}\right)^k + O(x^{n+1}). \tag{11.28b}$$

und somit

$$\mathcal{K}(x) + \frac{1+\lambda}{2} \tilde{\mathcal{K}}(x) + \frac{1-\lambda}{2} \tilde{\mathcal{K}}^*(x) = \frac{\pi^4}{45x^2} + (1-i\lambda)\frac{C_1}{\sqrt{x}} + \frac{11}{6}\left(\ln x + i\lambda\frac{\pi}{2}\right) + 2C_2 + \frac{8}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k+2)!} B_{2k+2}\left(\tfrac{3}{2}\right) \zeta(4k+1)\, \Gamma\left(2k+\tfrac{1}{2}\right) \left(\frac{4x^2}{\pi^4}\right)^k + O\left((x^2)^{n+1}\right) \tag{11.29}$$

Setzen wir dies in (11.9) ein und benützen dabei (9.4o), so erhalten wir im Grenzfall hoher Temperaturen oder kleiner Magnetfelder :

$$\mathcal{L}^{eff}[n^i\vec{B},T] = (\mathcal{N}^2-1)\frac{\pi^2\hbar c}{45}\left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^4 + kT\,\frac{1-i\lambda}{8\pi^2}\,(gB)^{3/2}\,C_1\sum_e |\hat{n}'_{c(e)}|^{\frac{3}{2}}$$
$$-\frac{1}{2}\vec{B}^2\left(1+\frac{g^2\hbar c}{48\pi^2}11\mathcal{N}\left(\ln\frac{4\left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^2}{\mu^2}+\kappa'\right)\right) + const.$$
$$+\mathcal{O}\left(\hbar c\left(\frac{gB\hbar c}{kT}\right)^4\right). \qquad (11.30)$$

Hierbei haben wir die SU($\mathcal{N}$) als Eichgruppe verwendet. Die $\hat{n}'_{c(l)}$ sind die Eigenwerte der Matrix $n^k T^k$ (vgl.(1.75b).). κ' ist eine beliebige reelle Konstante. Der Parameter λ ist gemäß (9.55) gleich null zu setzen. Ferner ist $C_1 = 5{,}742\ldots$. Das zugehörige effektive Potential ist dann durch

$$V^{eff}[n^i\vec{B},T] = -\mathcal{L}^{eff}[n^i\vec{B},T] \qquad (11.31)$$

gegeben.

Mit Hilfe von (11.30) erkennt man leicht, daß das Minimum des effektiven Potentials mit zunehmender Temperatur zu größeren Feldstärken wandert. Dies läßt vermuten, daß eine dynamische Symmetriebrechung in der QCD durch eine Erhöhung der Temperatur noch verstärkt wird, und daß es unmöglich ist, durch eine Erhöhung der Temperatur die ursprüngliche Symmetrie wieder herzustellen.

12. Zusammenfassung, Diskussion

Die Absicht dieser Arbeit ist es, durch das Studium der effektiven Lagrangedichte in kovariant-konstanten Colour-Feldern Einsicht in die wahre Natur des Vakuumzustandes der Quantenchromodynamik (QCD) zu gewinnen. Die effektive Lagrangedichte in kovariant-konstanten Colour-Feldern wurde schon von mehreren Autoren untersucht [7,8,9]. Die Berechnung der effektiven Lagrangedichte erfolgte hierbei durch eine Eigenzeitdarstellung [21]. Bei solch einer Eigenzeitdarstellung stellt es sich heraus, daß die Interpretation der Eigenzeitvariablen s als Eigenzeit im Schwingerschen Sinn [21] nicht mehr möglich ist, da im allgemeinen das Eigenzeitintegral für die von Schwinger benützten Integrationswege nicht mehr konvergent ist. Insbesondere kann man deshalb die in der Quantenelektrodynamik (QED) üblichen Integrationswege für das Eigenzeitintegral nicht bedenkenlos in die QCD übertragen. Unserer Ansicht nach wurden in den Arbeiten von Batalin, Matinian & Savvidi [7], Nielsen & Olesen [8] und Yildiz & Cox [9] die Integrationswege für das Eigenzeitintegral zu leichtfertig aus der QED übernommen. Als Hauptauswahlkriterium bei der Wahl der Integrationswege benützten diese Autoren die Forderung, daß das Eigenzeitintegral für s gegen unendlich zu konvergieren habe. In unserer Arbeit wurden jedoch die Integrationswege für die Eigenzeitdarstellung auch so gewählt, daß die Greenschen Funktionen in kovariant-konstanten Colour-Feldern, die bei der Berechnung der effektiven Lagrangedichte auftreten, dem Euklidischen Postulat genügen. Es ergeben sich dann andere Integrationswege für die Eigenzeitdarstellung als in [7,8,9]. Eine direkte Folge davon ist, daß wir auch einen anderen Imaginärteil für die effektive Lagrangedichte erhalten. Insbesondere ergibt sich, daß der Imaginärteil der effektiven Lagrangedichte in kovariant-konstanten colour-elektrischen Feldern negativ wird. Dies scheint zunächst im Widerspruch zu der Forderung, daß der Betrag der Vakuum-Vakkum Amplitude

immer kleiner oder gleich eins sein muß, zu stehen. (Vgl. (2.55).) Die Erörterung dieses Punktes ist so wichtig, daß wir unabhängig von den exakten Ein-Loop Rechnungen in kovariant-konstanten Feldern die effektive Wirkung für beliebige Feldkonfigurationen in der Ein-Loop Approximation bis zur Ordnung g^2 diskutieren. (Siehe Kapitel 3, 2. Abschnitt.) Wir finden hierbei, daß die effektive Wirkung für colour-elektrische Feldkonfigurationen einen negativen Imaginärteil aufweist und erklären dies durch den "anti-screening" Effekt in der QCD. Weiterhin finden wir, daß der Imaginärteil der effektiven Lagrangedichte in einem kovariant-konstanten colour-magnetischen Feld gleich null ist. Dies besagt – in Analogie zur QED, daß eine kovariant-konstante colour-magnetische Feldkonfiguration stabil ist. Dies ist im Gegensatz zu der Annahme der Kopenhagener Gruppe, daß ein kovariant-konstantes colour-magnetisches Feld zerfällt [8, 33]. Die Stabilität eines kovariant-konstanten colour-magnetischen Feldes mag zunächst überraschen. Wir wollen jedoch hierzu bemerken, daß der Imaginärteil der effektiven Wirkung in der Ein-Loop Approximation bis zur Ordnung g^2 für colour-magnetische Feldkonfigurationen $\vec{B}^i(x) = n^i \vec{B}(x)$, $\vec{E}^i(x) = 0$ mit einem konstanten Colour-Vektor n^i und beliebigen $\vec{B}(x)$ stets gleich null ist. Dies folgt unmittelbar aus (3.24), wenn man (3.23) und (3.15) berücksichtigt. Hierbei ist zu beachten, daß bei der Herleitung von (3.24) keinerlei Willkür in der Auswahl der Integrationswege in der komplexen Eigenzeitebene auftreten kann. Ein reines colour-magnetisches Feld, daß in eine konstante feste Richtung, $n^i = \text{const.}$, im Colour-Raum weist, ist daher stabil. Wenn man ein reines colour-magnetisches Feld, das instabil sein soll, studieren will, sollte man deshalb ein Feld betrachten, das die Zerlegung $\vec{B}^i(x) = n^i \vec{B}(x)$ mit einem konstanten Colour-Vektor $n^i = \text{const.}$ nicht zuläßt.

Zusammengefaßt haben unsere Rechnungen also andere Imaginärteile für die effektiven Lagrangedichten in kovariant-konstanten Colour-Feldern als in [7,8,9] ergeben. Die Realteile stimmen jedoch mit denjenigen von [7,8,9] überein. Es stellt sich nun

natürlich die Frage, ob die von uns gefundenen Resultate tatsächlich richtig sind und denjenigen von [7,8,9] vorzuziehen sind. Wir haben also zu klären, ob die von uns benützten Integrationswege in der komplexen Eigenzeitebene denjenigen von [7,8,9] vorzuziehen sind. Um dies zu beantworten, bemerken wir, daß unsere Integrationswege mit denjenigen von [7,8,9] für kleine Eigenzeiten übereinstimmen. Die Integrationswege unterscheiden sich nur für große Eigenzeiten. Wir erhalten also nur deshalb von [7,8,9] verschiedene Resultate, weil wir ein verschiedenes Verhalten der Gluonen bei großen Abständen annehmen. Um eine endgültige Wahl zwischen den in [7,8,9] und den von uns gefundenen Ergebnissen zu treffen, müssen wir das genaue Verhalten des Gluon-Propagators in kovariant-konstanten Colour-Feldern bei großen Abständen studieren. Dies ist jedoch völlig unmöglich, da ein kovariant-konstantes Colour-Feld aufgrund der Confinement-Hypothese nur in einem kleinen begrenzten Raumbereich erzeugt werden kann. Es ist deshalb überhaupt nicht zulässig, nach dem Verhalten des Gluon-Propagators in kovariant-konstanten Colour-Feldern bei großen Abständen zu fragen. Es werden daher sowohl die in [7,8,9] als auch die von uns gefundenen Ergebnisse nur mit Vorsicht zu interpretieren sein, weil sowohl in [7,8,9] als auch bei uns die Resultate nicht unwesentlich vom Verhalten des Gluon-Propagators bei großen Abständen abhängen, obwohl dies physikalisch gar nicht möglich ist, da es kovariant-konstante Colour-Felder nur in kleinen Raumbereichen gibt. Wir glauben jedoch, daß unsere Ergebnisse der Wirklichkeit etwas näher kommen, da unsere Rechnungen mit dem Euklidischen Postulat verträglich sind.

Weiterhin haben wir in dieser Arbeit den Versuch gemacht, das Verhalten der effektiven Lagrangedichte in einem Temperaturbad zu ermitteln. Um das Temperaturverhalten zu untersuchen, führten wir die Temperatur durch die Substitutionen (11.1) bis (11.3) für die Greenschen Funktionen ein. Diese Substitutionen sind

in der QED oder einer ϕ^4-Theorie angebracht, ob sie jedoch auch in der QCD in kovariant-konstanten Feldern zufriedenstellend sind, ist noch nicht völlig geklärt, da der Hamiltonoperator in einem konstanten colour-magnetischen Feld nicht selbstadjungiert ist. Es wurden deshalb auch andere Versuche gemacht, in der QCD in kovariant-konstanten Feldern die Temperatur einzuführen [29], [30]. Unsere Resultate deuten an, daß eine dynamische Symmetriebrechung in der QCD auch bei beliebig hohen Temperaturen nicht aufgehoben wird. Wir werden hierbei von den in [31] gefundenen Resultaten bestärkt, wenn auch andere Arbeiten [29], [30] auf ein gegenteiliges Verhalten hinweisen.

Ich danke sehr herzlich meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr. Walter Dittrich, der mich mit dieser interessanten Problematik vertraut gemacht hat, mir viele wertvolle Anregungen gab und das Manuskript kritisch durchlas. Auch habe ich bei dieser Arbeit sehr viele Anregungen durch Gespräche mit Dr. W. Becker, Dr. D. Großer und B.-G. Englert erhalten.

Literaturverzeichnis

[1] Y. Nambu, Phys. Rev.Lett. 4, 380 (1960).

[2] J. Goldstone, Nuovo Cimento 19, 154 (1961).

[3] P.W. Higgs, Phys. Lett.12, 132 (1964); Phys. Rev. Lett. 13, 508 (1964).

[4] T.W.B. Kibble, Phys. Rev. 155, 1554 (1967).

[5] S. Coleman & E. Weinberg, Phys. Rev. D7, 1888 (1973).

[6] D.J. Gross & A. Neveu, Phys. Rev. D10, 3235 (1974).

[7] I.A. Batalin, S.G. Matinian, & G.K. Savvidi, Sov. J. Nucl. Phys. 26, 214 (1977);
S.G. Matinian & G.K. Savvidy, Nucl. Phys. B134, 539 (1978).

[8] N.K. Nielsen & P. Olesen, Nucl. Phys. B144, 376 (1978).

[9] A.Yildiz & P.H. Cox, Phys. Rev. D21, 1095 (1980).

[10] C.W. Bernard, Phys. Rev. D9, 3312 (1974);
L.Dolan & R. Jackiw, D9, 3320 (1974);
S. Weinberg, Phys. Rev. D9, 3357 (1974).

[11] W. Dittrich, Phys. Rev. D19, 2385 (1979); Phys. Lett. 83B, 67 (1979).

[12] W. Marciano & H. Pagels, Quantum chromodynamics, Phys. Rep. 36, 137 (1978).

[13] J.C. Taylor, Gauge Theories of Weak Interactions (Cambridge University Press 1976).

[14] E.S. Abers & B.W. Lee, Gauge Theories, Phys. Rep. 9, 1 (1973).

[15] V.N. Gribov, Nucl. Phys. B 139, 1 (1978).

[16] L.D. Faddeev & V.N. Popov Phys. Lett. 25B, 30 (1967).

[17] J.C. Taylor, Nucl. Phys. B33, 436 (1971).

[18] H.Kluberg-Stern & J.B. Zuber, Phys. Rev. D12, 467; ibid. 482; ibid. 3159 (1975).

[19] G.'t Hooft, in Acta Universitatis Wratislavensis No. 38 XII th Winter School of Theoretical Physics in Karpacz (1975); Functional and Probabilistic Methods in Quantum Field Theory, Vol. I (1976) (unveröffentlicht).

[20] G.'t Hooft, Nucl. Phys. B62, 444 (1973).

[21] J. Schwinger, Phys. Rev. 82, 664 (1951).

[22] J. Honerkamp, Nucl. Phys. B48, 269 (1972).
[23] V.S. Vanyashin & M.V. Terent'ev, Sov. Phys. JETP 21, 375 (1965).
[24] N.K. Nielsen & P. Olesen, Phys. Lett. 79B, 304 (1978).
[25] G. Velo & D. Zwanziger, Phys. Rev. 186, 1337 (1969); ibid. 188, 2218 (1969); Tracts in Mathmatics and Natural Sciences, vol 4 ed A.S. Wightman (Gordon & Breach, New York, 1971).
[26] W.Y. Tsai & A. Yildiz, Phys. Rev. D4, 3643 (1971).
[27] H. Pagels & E. Tomboulis, Nucl. Phys. B143, 485 (1978).
[28] A. Fetter & J. Walecka, Quantum Theory of Many-Particle Systems (Mc Graw-Hill, New York, 1971).
[29] B. Müller & J. Rafelski, Phys. Lett. 101B, 111 (1981).
[30] J. Kapusta, Thermodynamics of chromomagnetism, Los Alamos Lab preprint LA-UR80-2550 (1980).
[31] M. Ninomiya & N. Sakai, Finite Temperature Behaviour of Color Ferromagnetic State in QCD, Rutherford and Appleton Lab preprint RL-81-018 (1981).
[32] M.R. Brown & M.J. Duff, Phys. Rev. D11, 2124 (1975).
[33] H.B. Nielsen & P.Olesen, Nucl. Phys. B160, 380 (1979); J.Ambjørn & P. Olesen, Nucl. Phys. B170, 60 (1980).

Lebenslauf und Schriftenverzeichnis

Ich, Volker Ulrich Schanbacher, bin am 2. Oktober 1953 als Sohn des damaligen Studienassessors Rainald Schanbacher und seiner Ehefrau Hedwig, geb. Rieber, in Reutlingen geboren.

Von April 1960 bis April 1964 besuchte ich die Volksschule und anschließend das naturwissenschaftliche Johannes-Kepler-Gymnasium in Reutlingen, wo ich am 21. Juni 1972 die Reifeprüfung ablegte. Danach leistete ich einen fünfzehnmonatigen Wehrdienst ab.
Im Herbst 1973 begann ich das Studium der Physik an der Eberhard-Karls-Universität Tübingen. Das Vordiplom in Physik erhielt ich 1975. Das Diplom legte ich im September 1979 ab.

Im Oktober 1979 begann ich am Institut für Theoretische Physik mit der Arbeit an der vorliegenden Dissertation " Effektive Lagrangedichte mit konstantem Hintergrundfeld und Temperaturbad in der Quantenchromodynamik". Ich fertigte diese Arbeit unter der Leitung von Prof. Dr. Walter Dittrich an und stellte sie im Juni 1981 fertig.

Meine akademischen Lehrer waren die Herren Professoren und Dozenten Baumann, Becker, Dittrich, Elwert, Gönnenwein, Großer, Hadeler, Hübener, Krüger, Lenz, Lindner, Mack, Mauder, Möllenstedt, Schief, Sohr, Speidel, Staudt, Stumpf, Tamaschke, Wildermuth, Wolff.

Ich bin Mitautor der folgenden Veröffentlichungen :

1) "On the Quantum Corrections in Synchrotron Radiation", Nuclear Physics B163, 133-155 (1980); (zusammen mit W. Dittrich).
2) "The Effective QCD Lagrangian at Finite Temperature", Physics Letters 100B, 415-419 (1981); (zusammen mit W. Dittrich).

Druck und Verarbeitung: copy shop, darmstadt, tel. 21353